线 性 代 数 讲 义

武汉大学数学与统计学院

马　涛

xifeiauto@gmail.com

2014/5/26

目　录

前 言......3
第一章 行列式（Determinants）......6
§1.1 二阶、三阶行列式......6
§1.2 全排列......8
§1.3 n阶行列式的定义......9
§1.4 行列式的性质......10
§1.5 行列式按行（列）展开......13
§1.6 克莱姆(Cramer)法则......16
第二章 矩阵（Matrixes）及其运算......19
§2.1 矩阵......19
§2.2 矩阵的关系和运算......21
§2.3 逆矩阵......28
§2.4 分块矩阵......32
第三章 矩阵的初等变换与线性方程组......37
§3.1 矩阵的初等变换......37
§3.2 初等方阵......39
§3.3 矩阵的秩......42
§3.4 线性方程组的解......45
第四章 向量组的线性相关性......51
§4.1 线性组合和线性表示......51
§4.2 向量组的线性相关性......55
§4.3 向量组的秩......57
§4.4 线性方程组解的结构......59
§4.5 向量空间......62
第五章 矩阵特征值与相似变换......65
§5.1 向量的内积及正交性......65
§5.2 特征值与特征向量......69
§5.3 相似矩阵......72
§5.4 实对称矩阵的对角化......75
§5.5 二次型及其标准形......77
§5.6 配方法化二次型为标准形......79
§5.7 正定性......81

教材：工程数学**线性代数**　第五版，同济大学应用数学系编

2014 课表： 4 -17周,每1周；7-9节，3区，1-425; 4-17周,每1周；8-10节，1区，5-303

前 言

线性代数是数学中的一门基础学科，现在它的基本理论已经相当完备，而以它为基础还推广出了很多新的数学学科．从实数集上的数学运算出发，线性代数首先涉及的是两个最基本的运算：**加法** $(x+y)$ 和**数乘** (kx)．那么 $kx+ly$ 就是一般的**线性运算**。记为 $z=kx+ly$，我们称这是由 (x,y) 到 z 的**线性变换**，或说 z 和 x,y 有**线性关系**。如果把自变量推广到多个的情况，则有如下形式的**线性关系**：

$$y=a_1x_1+a_1x_2+\cdots+a_1x_n\ .$$

若因变量也是多个，则有如下更一般形式的**线性关系**：

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{cases}$$

这是一个自变量和因变量的形式分别可记为(**向量**)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

的**变换**，它们分别属于线性空间 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^m$ (可简单理解为大家比较熟悉的 $\mathbf{R}^3$ 的推广)，故线性变换即为从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的映射．这些正是线性代数的研究对象．

线性代数中最初的问题是如何系统地求解**线性方程组**，如下是一个有 n 个未知量, m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_n \end{cases} \tag{*}$$

我们的**基本问题**是：i) 方程组在什么条件下有解，无解？ii) 方程组有解的情况下如何求解？

我们知道在只有两个或三个未知量的情形下可以通过**高斯消元法**求解，但即使如此，我们如何来回答第一个问题？我们对线性代数的学习即由此展开，我们所有教材前四章的内容正是围绕着这样的最基本问题进行讨论，最终系统完整地回答这一问题。

首先我们可以看到，决定方程组的它里面出现的系数，而与未知量的写法无关，那我们就它的系数专门拿出来组成一个数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

这就是我们将要给给出的一个基本概念**矩阵**，对方程组的处理就暂时转化成对矩阵中元素的处理。并把仅由未知量的系数构成的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为方程组的**系数矩阵**。而我们把矩阵的一列或一行的元素看成一个整体，也就对应着一般**向量**的概念，可以看到方程组（*）的解可表达成形式为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

的向量，所有的可能解也就是这种向量构成的一个集合。当 $m = n$ 时，我们约定一个由系数矩阵中的元素生成的运算结果，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

它是一个数，称为 n 阶行列式。利用该概念，我们将在第一章回答当 $m = n$ 时，系数行列的值满足何种条件时，方程组有唯一的一组解。

接下来在第一章，我们就从二元线性方程组出发，先给出二阶行列式的概念，并最终定义一般的 n 阶行列式，然后展示它的性质和对应的重要理论。

第一章 行列式（Determinants）

§1.1 二阶、三阶行列式

1. 二阶行列式

我们先从解二元线性方程组引入二阶行列式的概念及计算. 考虑二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

如果 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，那么方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}.$$

如果对于方程组的系数按其在方程组中出现的位置相应地排列成一个方形表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$，引入行列式记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad ,$$

该式的右端称为二阶行列式的展开式，a_{ij} (i=1,2　j=1,2) 称为二阶行列式的元素，横排的称为行，竖排的称为列.

例 1 计算下列各行列式

（1）$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$　　　　（2）$\begin{vmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \end{vmatrix}$

2. 三阶行列式

类似地，三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

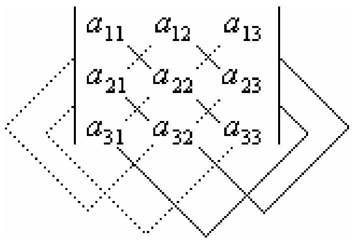
的系数所构成的行列式规定为

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}
$$

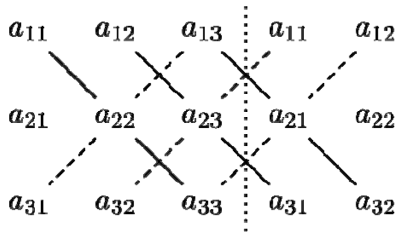
此式的右端称为三阶行列式按第一行的展开式.

三阶行列式的计算方法可用如下的图示记忆法，凡是实线上三个元素相乘所得到的项带正号，凡是虚线上三个元素相乘所得到的项带负号．这种展开法称为**对角线展开法**或称为**沙路法(Sarrus' rule** or **Sarrus' scheme)**.



对角线展开法(Sarrus' rule)

我们也可以用下面的图示法来展示**沙路法**



例 2 计算下列三阶行列式:

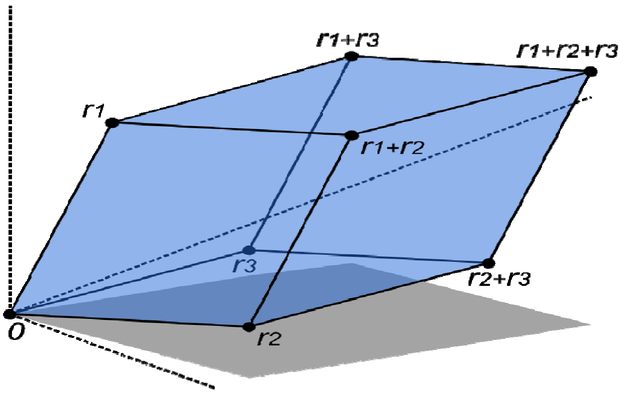
(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$　　　　(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

解

(2) 利用代数余子式按第一行展开进行计算较为方便

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.
$$

三阶行列式的几何意义：六面体的体积问题.



注意从三阶行列式的几何还容易得到它的一些重要的性质，比如交换两行，三阶行列式将变号. 我们希望能定义更一般地所谓 n 阶行列式并了解其性质，为此我们先来研究排列问题。

§1.2 全排列

全排列：把 n 个不同的数排成一列称为这 n 个数的**全排列**（或就称为**排列**）.

例如, 自然数 1,2,3 构成的不同排列有 3!=6 种.

123, 132, 213, 231, 312, 321

显然，n 个数构成的不同排列有 $n!$ 种. 其实我们总是可以认为这 n 个数就是 $1 \sim n$.

标准排列: n 个不同的自然数从小到大的排列 (等同于 $1,2,\cdots,n$ 按不同顺序排列).

那么其它的排列必然至少有两个数违反了从小到大的顺序，故我们可以给出下面的概念：

在一个排列中某两个数的先后次序与标准次序不同时, 称这两个数构成一个**逆序**；一个排列中逆序的总和称为排列的**逆序数**, 记作 τ .

例如，$\tau(6372451) = 14$，而 $\tau(6312457) = 7$.

注意，逆序数作为一个自然数，有奇偶性之分，从而我依此标准把排列分成两类：

$$\begin{cases}\text{奇排列：逆序数为奇数;} \\ \text{偶排列：逆序数为偶数.}\end{cases}$$

关于排列奇偶性的变化，我们有如下重要定理：

定理　排列经过一次对换，其奇偶性改变.

证　证明分为两步．先证相邻对换；再证一般对换．

注：由该定理，我们有:

- 奇排列经奇数次对换则变成偶排列；偶排列经奇数次对换则变成奇排列．奇排列经偶数次对换则变成奇排列；偶排列经偶数次对换则变成偶排列．
- 奇排列经对换变成标准排列, 对换次数为奇数; 偶排列经对换变成标准排列, 对换次数为偶数．

§1.3　*n* 阶行列式的定义

应用全排列的奇偶性，回头观察三阶行列式．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

有两个重要特点：

1) 乘积项中的元素位于不同行、不同列；

2) 当行标按照标准排列来排，列标的排列排列决定了乘积项前面的符号，其中

正项：列标排列 123, 231, 312 为偶排列；

负项：列标排列 132, 213, 321 为奇排列．

于是我们给出略微抽象的符号表示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1p_2p_3)} (-1)^{\tau(q_1q_2q_3)} a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}\,.$$

由此形式，我们定义

定义　设有 n^2 个数 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$，令

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

并且约定

$$D=\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n},$$

则称 D 为 n 阶行列式．可记作 $\det(a_{ij})$．

我们把该定义中的运算描述为由 D 中所有位于不同行不同列元素构成的乘积项的**代数和**．由此定义可知和式中共有 $n!$ 项．

建立在对换定理上，我们有

$$\begin{aligned}
D&=\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}\\
&=\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{2q_2}a_{1q_1}\cdots a_{nq_n}\\
&=-\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^{\tau(q_2q_1\cdots q_n)}a_{2q_2}a_{1q_1}\cdots a_{nq_n}\\
&=\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^{\tau(q_2q_1\cdots q_n)+\tau(21\cdots n)}a_{2q_2}a_{1q_1}\cdots a_{nq_n}\\
&=\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}=\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}
\end{aligned}$$

这里说明了“行标按标准排列来排”并不是本质的要求．由此公式我们立即给出一个重要的性质．

§1.4 行列式的性质

首先我们称

$$D^T=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\&\cdots&\cdots&\\a_{11}&a_{2n}&&a_{nn}\end{vmatrix}$$

为行列式 D 的**转置**行列式．

如二阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2\\-3&4\end{vmatrix}$ 的转置行列式为

$$D^T=\begin{vmatrix}1&-3\\2&4\end{vmatrix}.$$

性质 1 行列式 D 与它的转置行列式 D^T 的值相等．

注　由于性质 1，我们在讨论下面的性质时，只强调对行的处理，则对列处

理也必然有类似性质.

性质 2 如果把行列式的某两列（或两行）对调，则所得的行列式与原行列式的绝对值相等，符号相反.

推论 若行列式 D 如果某两行元素对应相等，则 $D=0$.

性质 3 如果把行列式 $D=0$ 的某一列（行）的每一个元素同乘以一个常数 k 则此行列式的值等于 kD. 也就是说，行列式中某一列（行）所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面，即有如下形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 如果行列式的某两列（或两行）的对应元素成比例，则此行列式的值等于零.

推论 $\det(ka_{i,j})=k^n\det(a_{i,j})$.

性质 4 如果行列式的某一行（列）的每一个元素都是二项式，则此行列式等于把这些二项式各取一项作成相应的行（列），其余的行（列）不变的两各行列式的和. 即有如下形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例 计算 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & 2a_1 & b_1 \\ a_2+b_2 & 2a_2 & b_2 \\ a_1+b_1 & 2a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

解 $$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & 2a_1 & b_1 \\ a_2+b_2 & 2a_2 & b_2 \\ a_1+b_1 & 2a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 2a_1 & b_1 \\ a_2 & 2a_2 & b_2 \\ a_1 & 2a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & 2a_1 & b_1 \\ b_2 & 2a_2 & b_2 \\ b_1 & 2a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0+0=0.$$

性质 5 如果把行列式的某一列（行）的每一个元素加上另一列（行）的对应元素的 k 倍，则所得行列式与原行列式的值相等，即有如下形式

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

例 1　计算行列式 $D = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 11.$

在计算过程中约定采用下列标记方法：

1．以 r 代表行，c 代表列．

2．把第 i 行（或第 i 列）的每一个元素加上第 j 行（或第 j 列）对应元素的 k 倍，记作 $r_i + kr_j$ (或 $c_i + kc_j$)．

3．互换 i 行（列）和 j 行（列），记作 $r_i \leftrightarrow r_j$ (或 $c_i \leftrightarrow c_j$)．

例 2　计算行列式 $D = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

例 3　计算行列式 $D = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ & \cdots & \cdots & \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$

例 4 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ & \cdots & \cdots & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

证明 $D=D_1D_2$.

证明 若

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} p_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}=p_{11}p_{22}\cdots p_{nn},$$

且

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=q_{11}q_{22}\cdots q_{nn}.$$

则必有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} p_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f_{11} & 0 & \cdots & 0 & q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & 0 & q_{21} & q_{22} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots & \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} & q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=|A||B|.$$

§1.5 行列式按行（列）展开

一个三阶行列式可以用三个二阶行列式来表示，所以我们类似地用 n 个 n-1 阶行列式来表示 n 阶行列式，即为行列式展开问题.

定义 1 设有 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称

$$M_{i,j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 D 中元素 $a_{i,j}$ 的余子式，即为划掉 A 的第 1 行第 j 列后所得的 n-1 阶行列式. 并称 $A_{i,j}=(-1)^{i+j}M_{i,j}$ 为 D 中元素 $a_{i,j}$ 的代数余子式.

定理 1 行列式等于它的任一行的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,\cdots,n.$$

注意，该关系式可以称为行列式 D 按第 i 行的展开式. 我们可以从这个关系式来对行列式下定义，这种定义方法称为**归纳定义**. 下面来证明该定理.

证 先证 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}$. 再注意

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

变成

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

经过了 $2(i+j-1)$ 次的行和列变换. 故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}=a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}\,.$$

最后再对第 i 行分解退得证.

例 1 计算$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

解 因为$a_{12}=a_{13}=0$，所以由定义

$$D=a_{11}A_{11}+a_{14}A_{14}$$

$$=2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}+4\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 8 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=2(1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}+5\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}]-4[7\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix})$$

$$=2[5+5(18-4)]-4[7(18-4)-(6-8)]=250.$$

例 2 按第三行展开计算行列式计算$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

解 $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=a(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}+b(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}+$$

$$c(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}+d(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=3a-b+2c+d.$$

例 3 证明如下的范德蒙 (Vandermonde) 行列式

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

用数学归纳法证明.

例 3 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\\4&1&3&2\\1&4&3&2\end{vmatrix}$，求 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}$.

因为$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&1\\1&1&3&2\\1&4&3&2\end{vmatrix}=0$,故 $D=0$.

推论 1 行列式 D 的一行元素分别与另一行对应的代数余子式之乘积的和等于零，即 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$ $(i,j=1,2,\ldots,n，i\neq j)$.

综合以上推论和按行展开定理，我们有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D, & i=j;\\0, & i\neq j.\end{cases}$$

同样也有

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D, & i=j;\\0, & i\neq j.\end{cases}$$

§1.6 克莱姆(Cramer)法则

设 n 元方程组为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\tag{1}$$

其系数行列式为 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$. 在系数行列式 D 中第 j 列的元素依次改换为 b_1，b_2. …b_n，得到的行列式记作 D_j，即：

$$D_j=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,j-1}&b_1&a_{1,j+1}&\cdots&a_{2n}\\a_{21}&\cdots&a_{2,j-1}&b_2&a_{2,j+1}&\cdots&a_{3n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&b_n&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

关于线性方程组（1）的解有下述法则：

克莱姆法则 当线性方程组（1）的系数行列式 $D\neq 0$ 时，该方程组有且只有唯一解：$x_j=\dfrac{D_j}{D}\,(j=1,2,\cdots,n)$．

例 1 用克莱姆法则解方程组$\begin{cases} x_1-x_2+2x_4=-5 \\ 3x_1+2x_2-x_3-2x_4=6 \\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4=0 \\ 2x_1-x_3=0 \end{cases}$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{(c_1)+2(c_3)}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(r_3)-2(r_1)]{(r_2)-(r_1)}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}=5\neq 0$$

经计算还可得到

$$D_1=\begin{vmatrix} -5 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=10\quad ;\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-15\,;$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=20\,;\quad D_4=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-25\,.$$

得方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{10}{5}=2\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{15}{5}=-3$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{20}{5}=4\qquad x_4=\frac{D_4}{D}=\frac{-25}{5}=-5$$

故

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = -5 \end{cases}.$$

克莱姆法则更重要的是其理论意义，我们专门从中抽出如下定理.

定理 1 如果线性方程组(1)的系数行列式 $D \neq 0$，则(1)一定有解,且解是唯一的.

定理 2 如果线性方程组(1)是齐次的方程组，且系数行列式 $D \neq 0$，则(1)一定只有零解.

推论 1 齐次方程组有非零解 $\Rightarrow D = 0$.

例 2 已知 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解，求 λ.

解 $D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 = 0$，故 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -2$.

第二章　矩阵（Matrixes）及其运算

§2.1 矩阵

1 矩阵的概念

定义 1 由 $m\times n$ 个数排成的 m 行 n 列数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 m 行 n 列矩阵，简称为 $m\times n$ 矩阵．其中 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列处的元素，i 称为 a_{ij} 的行指标，j 称为 a_{ij} 的列指标．

矩阵通常用 $A, B, C\ldots$大写字母表示，若需指明矩阵的行数和列数常写为 $A_{m\times n}$ 或 $A=(a_{ij})_{m\times n}$．例如：$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$为一个 2×3 矩阵．

在以后的讨论中，还会经常用到一些特殊的矩阵，下面分别给出他们的名称：

元素全为零的矩阵称为零矩阵，记作 $0_{m\times n}$ 或 0，如：

$$0_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\quad ,\ 0_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

当 $m=n$ 时，称 A 为 n 阶矩阵（或 n 阶方阵）.

只有 1 行（$1\times n$）或 1 列（$m\times 1$）的矩阵，分别称为行矩阵和列矩阵，形式为

如：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$.

若方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素 $a_{ij}=0$（$i\neq j$），则称 A 为对角矩阵，a_{ii}（$i=1,2,\ldots,n$）称为 A 的对角元，如 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$为二阶对角矩阵.

对角元全为数 1 的对角矩阵称为单位矩阵，n 阶单位矩阵记为 E_n（或 I_n）.

形如$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$的矩阵分别称为上三角矩阵和下三角矩阵.

2 线性变换与矩阵

设变量$y_1, y_2, \cdots, y_m$可由变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$表示为

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

称之为由变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$到变量$y_1, y_2, \cdots, y_m$的线性变换，它与矩阵

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

是一一对应关系.

3 线性方程组与矩阵

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

称

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为系数矩阵. 而

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

为增广矩阵.

§2.2 矩阵的关系和运算

1 矩阵的关系

在考虑两个或多个矩阵时，我们称行数和列数都相等的矩阵为**同型矩阵**.

定义 1 如果两个 m 行 n 列的矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$， $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 的对应元素分别相等，即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 那么就称这两个矩阵相等.

例 1 已知 $A=\begin{pmatrix} a+b & 3 \\ 3 & a-b \end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix} 7 & 2c+d \\ c-d & 3 \end{pmatrix}$而且 A=B，求 a, b, c, d.

解 根据矩阵相等的定义，可得方程组$\begin{cases} a+b=7 \\ 3=2c+d \\ 3=c-d \\ a-b=3 \end{cases}$

解得 a=5, b=2, c=2, d=-1，即当 a=5, b=2, c=2, d=-1 时 A=B.

2 矩阵的加法

定义 2 两个 m 行 n 列的矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 相加（减），我们称

$$A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})$$

为 A 与 B 的**和**（**差**）.

显然，两个 m 行 n 列的矩阵相加（减）得到的和（差）仍是一个 m 行 n 列的矩阵. 应注意，只有当两个矩阵的行数与列数分别相同时，它们才能作加减运算.

容易验证，矩阵的加法运算满足以下规律：

(1) 交换律：A+B=B+A；

(2) 结合律：(A+B)+C=A+(B+C).

例 2 已知 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$求 A+B.

解 $A+B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$；

3 数与矩阵相乘

定义 3 一个数 k 与一个 m 行 n 列矩阵 $A=(a_{ij})$ 相乘，我们称

$$kA=(ka_{ij})$$

为矩阵 A 关于数 k **乘积**，简称**数乘**，并且规定 $Ak=kA$.

例如，设 $A=\begin{pmatrix}5 & 6 & -7\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$，那么 $2A=\begin{pmatrix}2\times5 & 2\times6 & 2\times(-7)\\ 2\times4 & 2\times3 & 2\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 12 & -14\\ 8 & 6 & 2\end{pmatrix}$.

实际上我们可以由加法和数乘来约定减法，这意味着减法可以不作为基本运算．并且我们把加法和数乘统称为**线性运算**.

4 矩阵与矩阵相乘

矩阵与矩阵乘法的一般定义如下：

定义 4 设 $m\times p$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times p}$，$p\times n$ 矩阵 $B=(b_{ij})_{p\times n}$，则由元素

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}(i=1,2\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

构成的 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$ 称为矩阵 A 与 B 的**乘积**，记为 $C=AB$.

由定义可知：

(1) A 的列数必须等于 B 的行数，A 与 B 才能相乘；

(2) 乘积 C 的行数等于 A 的行数，C 的列数等于 B 的列数；

(3) 乘积 C 中第 i 行第 j 列元素 C_{ij} 等于 A 的第 i 行元素与 B 的第 j 列元素对应乘积之和，即

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}\ .$$

实例 设甲、乙两家公司生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三种型号的计算机，月产量（单位：台）为

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} \quad I & II & III \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix}25 & 20 & 18\\ 24 & 16 & 27\end{pmatrix} & \begin{matrix}\text{甲},\\ \text{乙}\end{matrix} \end{array}$$

如果生产这三种型号的计算机的每台的利润（单位：万元/台）为

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix}0.5\\ 0.2\\ 0.7\end{pmatrix} & \begin{matrix}I\\ II\\ III\end{matrix} \end{array},$$

则这两家公司的月利润（单位：万元）应为

$$\begin{pmatrix} 25\times0.5+20\times0.2+18\times0.7 \\ 24\times0.5+16\times0.2+27\times0.7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 29.1 \\ 34.1 \end{pmatrix}\begin{matrix}\text{甲}\\ \text{乙}\end{matrix},$$

可见，甲公司每月的利润为 29.1 万元，乙公司的利润为 34.1 万元.

例 3　设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$，求 AB，AD.

解　$AB=\begin{pmatrix} 1\times1+2\times3+3\times2 & 1\times3+2\times1+3\times2 \\ 3\times1+2\times3+1\times2 & 3\times3+2\times1+1\times2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$；

AD 无意义.

例 4　已知 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 AI 和 IA.

解　$AI=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=A$;

$$IA=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=A.$$

由上例可知，单位矩阵 I 在矩阵的乘法中与数 1 在数中的乘法中所起的作用相似.

矩阵乘法不满足交换律，例如

$$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

所以在进行运算时，**千万要注意，不能把左、右次序颠倒**.

若两个矩阵 A 与 B 满足 $AB=BA$，则称 A 与 B 是**可交换的**.

矩阵乘法满足如下运算规律：

（1）结合律：$(AB)C=A(BC)$；

（2）分配律：$A(B+C)=AB+AC$，$(B+C)A=BA+CA$；

（3）$k(AB)=(kA)B=A(kB)$，k 为任意常数．

注意，乘法的**消去律**也不成立，也就是说从 $AB=0$ 推不出 $A=0$ 或 $B=0$．

例 5 设 $A=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，验证 A 与 B 可交换．

证 $AB=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 2 & 10\end{pmatrix}$；

$$BA=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 2 & 10\end{pmatrix},$$

因为 $AB=BA$，所以 A 与 B 可交换．

定义 设 A 为 n 阶矩阵，则 $A^k=\overbrace{A\cdots\cdots A}^{k个}$（$k$ 为正整数）称为矩阵 A 的 k 次幂．矩阵 A 的运算满足

$$A^k A^l=A^{k+l},(A^k)^l=A^{kl}\ （k，l 为正整数），$$

由于矩阵乘法一般不满足交换律，因此一般来说 $(AB)^k\neq A^k B^k$．

例 6 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$，求 A^3．

解 $A^2=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\sqrt{3}\\ -2\sqrt{3} & -2\end{pmatrix}$;

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-2 & 2\sqrt{3}\\ -2\sqrt{3} & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}.$$

利用矩阵表示线性方程组:

对于线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases},$$

设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

根据矩阵乘法

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

它是一个 m 行一列的矩阵，根据矩阵相等的定义可得

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

所以方程组可以用矩阵的乘法 $AX=B$ 来表示．方程组中系数组成的矩阵 A 称为系数矩阵.

例 5 利用矩阵表示线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1 \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=2 \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=1 \end{cases}$.

解 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

因为 $AX=B$，所以方程组可表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5 矩阵的转置

把矩阵 A 的行与列依次互换，得到的矩阵 A^T 称为矩阵 A 的转置矩阵．即矩

阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的转置矩阵

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

一个 m 行 n 列矩阵 A 的转置矩阵 A^T 是一个 n 行 m 列的矩阵.

矩阵转置满足如下运算规律：

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$；

(2) $(A_{m\times n}+B_{m\times n})^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$；

(3) $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$；

(4) $(A_{m\times s}B_{s\times n})^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

利用转置的概念，我们定义**对称矩阵**的概念：设矩阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}=A$，则称为矩阵 A 为对称矩阵.

6 矩阵的行列式

应当注意的是：矩阵与行列式是两个不同的概念，行列式是一个算式，计算结果是一个数，而矩阵是有数构成的一个数表；记法也不同，行列式用的是两条竖线，而矩阵用的是一对圆括号或中括号.

但是, 它们之间又存在着联系, 当矩阵 A 为方阵时, 我们称由 A 的元素位置不变构成的行列式为 **A 的行列式**, 记作 $|A|$ 或 $\det(A)$.

方阵的行列式满足如下运算规律：

(1) $|A|^{\mathrm{T}}=|A|$

(2) $|kA|=k^n|A|$

(3) $|AB|=|A||B|$ （证明不显然！）

(4) $|A^k|=|A|^k$

证 (3) 首先我们构造一个新的矩阵

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

首先有$D=|A||B|$．再对D做初等变换，可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

这里$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1},\cdots$． 一般地

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj},\ i,j=1,2,\cdots,n.$$

即有$C=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}=|AB|$．并且同样样也有

$$D=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

.

则$|AB|=|A||B|$得证.

注 方阵是数表，而行列式是数值，对任意的两个方阵$A_{n\times n}$和$B_{n\times n}$，一般有$A_{n\times n}B_{n\times n}\neq BA$，而必有$|AB|=|BA|$.

7 共轭矩阵

若矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$的元素在复数域中取值，则称$\bar{A}=(\bar{a}_{ij})_{m\times n}$为$A$的共轭矩阵

矩阵共轭运算满足如下运算规律：

(1) $\overline{(A+B)}=\bar{A}+\bar{B}$

(2) $\overline{kA}=\bar{k}\bar{A}$

(3) $\overline{AB}=\overline{A}\overline{B}$

(4) $(\overline{A})^{\mathrm{T}}=\overline{(A^{\mathrm{T}})}$

§2.3 逆矩阵

对于最简单的一元一次方程$ax=b(a\neq 0)$，我们可以采用在方程两边同时乘以a^{-1}的方法得到它的解

$$x=a^{-1}b,$$

对于一个含有 n 个未知数 n 个方程的线性方程组，我们知道可用矩阵表示成

$$AX=B,$$

其中 A 是一个 n 阶方阵，X 与 B 是有 n 个元素的列矩阵.

我们可以设法找出这样一个矩阵，使它左乘 A 得到一个单位矩阵 E，并把这样的一个矩阵记作 A^{-1}，即

$$A^{-1}A=E.$$

把 A^{-1} 左乘方程$AX=B$的两边，得

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B,$$

即

$$(A^{-1}A)X=A^{-1}B,$$

因为

$$A^{-1}A=I, \quad IX=X,$$

所以$X=A^{-1}B$. 这就是 n 元线性方程组的解.

1 逆矩阵的定义

对于这样的矩阵A^{-1}，给出下面的定义：

定义 对于一个 n 阶方阵A，如果存在一个 n 阶方阵B，使$BA=AB=E$，那么矩阵B称为矩阵A的逆矩阵，记为A^{-1}. 并称矩阵A是可逆的.

注 由定义可见矩阵A如果可逆，则必须是方阵；我们还可判断 n 阶方阵 A 的逆矩阵是**唯一的**，实际上若还有 n 阶方阵C，使$CA=AC=E$，则

$$B=BAC=C.$$

同样直接由定义，在等式$BA=AC=E$两边求它们的行列式，则有

$$|B||A| = |A||B| = 1,$$

于是可知$|A|,|B|$都不为零且$|A| = \dfrac{1}{|B|}$. 反过来，我们需要判断方阵A可逆的充分条件以及具体的求法.

2 逆矩阵的性质和求法

在这里，我们先介绍一个联系于矩阵A的新的概念，即将矩阵A的每一个元素a_{ij}换成它在$|A|$中的相应的代数余子式A_{ij}，得矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

然后将它转置，并将得到的矩阵记为A^*，称之为矩阵A的伴随矩阵．即

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

我们做矩阵的乘积AA^*，可得

$$\begin{aligned} AA^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|E \end{aligned}$$

同样也有$A^*A = |A|E$．由以上讨论，我们实际上证明了如下定理：

定理　**设A为n阶方阵，A可逆的充分必要条件是$|A| \neq 0$，并且矩阵A的逆矩阵为**

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}.$$

由此定理，我们简化逆矩阵的定义，即有如下推论：

推论　设 A 为 n 阶方阵，A 可逆的充分必要条件是 $BA=E$ 或 $AB=E$.

注意，一个 n 阶方阵 A，若它的行列式 $|A|=0$，则称方阵 A 是**奇异的**，否则称 A 为**非奇异**的．以上定理意味着：一个 n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是 A 为一个**非奇异**方阵．

例 1　求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵．

解　因为 $|A|=\begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$，所以 A^{-1} 存在

因为 $A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1$，$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-1$，$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1$，

$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=4$　　，　　$A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=5$　　，

$A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-6$，

$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=3$，　$A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=3$，　$A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-4$

所以 $A^*=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 3\\ -1 & 5 & 3\\ 1 & -6 & -4\end{pmatrix}$. 因此矩阵 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$.

例 2　求矩阵 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 的逆矩阵．

解　$|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$，当 $ad-bc=0$ 时，矩阵 A 是不可逆的，即矩阵 A 的逆矩阵不存在．

当 $ad-bc\neq 0$ 时，矩阵 A 是可逆的，又

$$A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

故当$ad-bc \neq 0$时，可得到矩阵A的逆矩阵

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

例 2 设矩阵A满足$A^2-2A-4E=O$，求$(A+E)^{-1}$.

解得 $(A+E)^{-1}=A-3E$

根据逆矩阵的定义，设矩阵A可逆，还可推出以下**性质**：

(1) $(A^{-1})^{-1}=A$;

(2) $(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$;

(3) $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$;

(4) $|A^{-1}|=|A|^{-1}$;

(5) 若两个同阶方阵A和B都可逆，则A与B的积也是可逆，且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

证：因为$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}IB=B^{-1}B=I$,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I. \qquad \square$$

所以$B^{-1}A^{-1}$是AB的逆矩阵，即$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

(6) 消去律：$AB=0 \Rightarrow B=0$.

3 用逆矩阵解线性方程组

一个线性方程组,若它的系数矩阵可逆,那么就可以用逆矩阵来求得它的解.

例 4 用逆矩阵解线性方程组$\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3=2 \\ x_1-x_2=2 \\ -x_1+2x_2+x_3=4 \end{cases}$.

解 方程组的矩阵形式是$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$，由例 2 知系数矩阵的逆矩

阵存在，因而有$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -20 \\ 26 \end{pmatrix}$．根据矩阵相等的定义，得方程组的解为 x_1=-18，x_2=-20，x_3=26．

含有未知矩阵的方程叫做矩阵方程．例如，$AX=D$，$XB=D$，$AXB=C$ 等等都是矩阵方程，其中 X 为未知矩阵．利用逆矩阵还可以解一些特殊的矩阵方程，在这里讨论的矩阵 A 和 B 都假设是可逆的．

例 5 解矩阵方程 $XB=D$，其中 $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$．

解 因为$|B| = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$，所以 B 为可逆．由例 2 可知 $B^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$．以 B^{-1} 同时右乘于方程 $XB=D$ 的两边，得 $XBB^{-1}=DB^{-1}$．

即 $X=DB^{-1}= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -10 & 8 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$．

§2.4 分块矩阵

1 分块矩阵的概念

用若干条横线与纵线将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 划分为若干个小矩阵, 称这些小矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 的子矩阵, 把子块当元素来看待的矩阵称为分块矩阵．

$$A = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c:c:c:c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

特点：(1) 同行上的子矩阵有相同的“行数”；

(2) 同列上的子矩阵有相同的“列数”．

2 分块矩阵的运算

矩阵分块后其实并没有改变原矩阵,但我们要注意分块后矩阵分块进行计算

的要求和方法.

1. 加法：设 $A_{m\times n}=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, $B_{m\times n}=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$, 则

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}$$

要求： $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 同阶, 且分块方式相同.

2. 数乘：设 $A_{m\times n}=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, 则

$$kA_{m\times n}=\begin{pmatrix} kA_{11} & \cdots & kA_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ kA_{s1} & \cdots & kA_{sr} \end{pmatrix}.$$

3. 乘法：设 $A_{m\times l}=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}$, $B_{l\times n}=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix}$, 记

$$C_{ij}=\begin{pmatrix} A_{i1} & \cdots & A_{it} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ B_{tj} \end{pmatrix}=A_{i1}B_{1j}+\cdots+A_{it}B_{tj}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}.$$

要求： $\boldsymbol{A}$ 的列划分方式与 $\boldsymbol{B}$ 的行划分方式相同.

例 1 $A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} E & O \\ A_{21} & E \end{pmatrix}$

$$B=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_{21}B_{11}+B_{21} & A_{21}+B_{22} \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hdashline -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

4. 转置：设 $A_{m\times n}=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，则

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{sr}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

特点：“大转”+“小转”.

5. 准对角矩阵：设 $\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{A_2},\cdots,\boldsymbol{A_s}$ 都是方阵，记

$$A=\operatorname{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_s)=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

性质：(1) $\det A=\det A_1 \det A_2 \ \cdots\ \det A_s$.

(2) $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow A_i\ (i=1,2,\cdots,s)$ 可逆，且有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

例 2 $A=\left(\begin{array}{c:cc} 5 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$，那么

$$A^{-1}=\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\\hline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|cc}\frac{1}{5}&0&0\\\hline 0&1&-1\\0&-2&3\end{array}\right).$$

例 3 设 $\boldsymbol{A}_{m\times m}$ 与 $\boldsymbol{B}_{n\times n}$ 都可逆，$\boldsymbol{C}_{n\times m}$，$M=\begin{pmatrix}A&O\\C&B\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{M}^{-1}$.

解 $\det M=\det A\ \det B\neq 0\Rightarrow M$ 可逆，设

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{pmatrix},$$

那么由

$$\begin{pmatrix}A&O\\C&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_m&O\\O&E_n\end{pmatrix},$$

可得

$$\begin{cases}AX_1=E_m\\AX_2=O\\CX_1+BX_3=O\\CX_2+BX_4=E_n\end{cases},$$

即有

$$\begin{cases}X_1=A^{-1}\\X_2=O\\X_3=-B^{-1}CA^{-1}\\X_4=B^{-1}\end{cases}$$

故

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\-B^{-1}CA&B^{-1}\end{pmatrix}.$$

（**注** 该例的结果放在下一章可用分块阵初等变换法直接求得）

第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

§3.1 矩阵的初等变换

正如我们在第一次课所言，线性代数最基本的问题围绕着线性方程组的求解展开，在上一章我们了解了矩阵和线性方程组形式上的对应，本章我们将具体把对矩阵的处理运用到解方程上来. 这里我们首先从解方程的基本方法**高斯消元法**出发来展开我们的讨论.

1 高斯消元法解方程

解线性方程组的基本方法是高斯消元法，例如

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 & (1) \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 & (2) \\ 2x_1 + 2x_3 = 6 & (3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-2(1)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 & (4) \\ 4x_2 - x_3 = 2 & (5) \\ x_2 - x_3 = 5 & (6) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(5)\leftrightarrow(6)]{(5)-4(6)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 & (7) \\ x_2 - x_3 = 5 & (8) \\ 3x_3 = -18 & (9) \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -6 \end{cases}.$$

解此线性方程组的基本步骤可总结为三种：

(1) 互换两个方程的位置；

(2) 用非零常数乘某一个方程；

(3) 将某个方程的某个常数倍加到另一个方程.

当我们把方程组的系数对应着增广矩阵

$$\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

解方程的过程基本对应着矩阵的变换如下：

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&3&1\\4&2&5&4\\2&0&2&6\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&3&1\\0&4&-1&2\\0&1&-1&5\end{array}\right)$$

$$\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&3&1\\0&1&-1&5\\0&0&3&-18\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&9\\0&1&0&-1\\0&0&1&-6\end{array}\right)$$

2 矩阵的初等变换

解方程组的三种基本变换对应着三种矩阵行的三种基本变换, 我们称之为**矩阵的初等行变换**:

(1) 互换方程组的两行，表示为$r_i \leftrightarrow r_j$；

(2) 用非零常数乘矩阵的某一行, 表示为kr_i；

(3) 将某一行的乘以某一常数加到另一个行上面去$r_i + kr_j$.

相应地也可定义**初等列变换**. 若矩阵A经初等变换变成B，则称矩阵A与矩阵B**等价**，记作$A \sim B$.

解方程组的目标是通过初等变换把方程组变成可以直接判断解的存在性以及解的表达的“最简单”形式. 一般形式如下

$$\begin{cases}x_1+b_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+b_{1n}x_n=d_1\\x_2+b_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+b_{2n}x_n=d_2\\\quad\cdots\cdots\cdots\\x_r+b_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+b_{rn}x_n=d_r\\\qquad\qquad 0=d_{r+1}\end{cases}$$

若$d_{r+1}\neq 0$, 则方程组无解; 若$d_{r+1}=0$, 则方程组有解.

对应于相应的增广矩阵, 我们作行变换，有**行阶梯形**和**行最简形**的概念, 如

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&3&1\\0&1&-1&5\\0&0&3&-18\end{array}\right)\text{ 是}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&3&1\\4&2&5&4\\2&0&2&6\end{array}\right)$$它的**行阶梯形.**

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&9\\0&1&0&-1\\0&0&1&-6\end{array}\right)\text{ 是}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&3&1\\4&2&5&4\\2&0&2&6\end{array}\right)$$它的**行最简形.**

如果也允许做列变换，则有**标准形**的概念.例如

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

是 $\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$ 的**标准形.**

标准形的一般形式为

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

（同型矩阵中能变成相同标准形的所有矩阵构成一个**等价类**.）

例 将矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 13 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -8 \end{pmatrix}$ 化成行最简形和标准型.

行最简形为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & -7 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

§3.2 初等方阵

定义 1 对单位矩阵进行一次初等变换得到的矩阵, 称为**初等方阵**.

初等矩阵可分为以下 3 类：

1. $E(i(k))=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & k & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$

2. $E(i,j)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$

3. $E(ij(k))=\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$

注意，对单位矩阵进行一次初等列变换, 相当于对单位矩阵进行一次同类型的初等行变换.

观察如下运算

$E(i(k))A$，$E(i,j)A$，$E(ij(k))A$ 以及 $AE(i(k))$，$AE(i,j)$，$AE(ij(k))$，

则可得到如下的定理.

定理 1 **对矩阵 A 施行一次初等行（列）变换等价于从左（右）边乘以一个相应的初等变换.**

由此定理，立即可得**初等方阵可逆，并且逆矩阵仍然是初等方阵**，即

$$E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))，E(i,j)^{-1}=E(j,i) \text{ 和 } E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k)).$$

对一个任意一个矩阵 $A_{m\times n}$，经过初等变换总可以变成标准形 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 则由定理 2.1，存在一系列的矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 及 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_l$，使得

$$P_1P_2\cdots P_mAQ_1Q_2\cdots Q_l=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

则有

$$A=P_m^{-1}\cdots P_1^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_l^{-1}\cdots Q_1^{-1}.$$

如果 A 是 n 阶可逆方阵，则必有

$$A=P_m^{-1}\cdots P_1^{-1}E_nQ_l^{-1}\cdots Q_1^{-1}.$$

故我们可以给出如下的定理.

定理 2 **设 A 为 n 阶可逆方阵，则存在一系列的初等方阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s$，使得**

$$A=P_1P_2\cdots P_s.$$

由定理 2.2 的形式，也就有

$$P_s^{-1}\cdots P_1^{-1}A=E\ .$$

故 $A^{-1}=P_s^{-1}\cdots P_1^{-1}$.

注意，以上讨论意味着可逆矩阵 A 可以分解成一系列初等方阵的乘积，而矩阵 A 只要做初等行变换就可以变成单位矩阵．这就给我们提供了一个计算 A^{-1} 的有效方法：构造新矩阵 $(A\mid E)$，利用分块矩阵的乘法可得

$$A^{-1}(A\mid E)=(E\mid A^{-1}),$$

这等价于若对 $(A\mid E)$ 施以初等行变换将 A 变为 E，则 E 就变为 A^{-1}，即

$$(A\mid E)\sim(E\mid A^{-1})$$

例 3 将矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&4\end{pmatrix}$，求逆矩阵 A^{-1}.

解 $$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\1&3&4&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-4&-2&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&1&-1&0&1\\0&-3&-4&-2&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&3&0&-2\\0&1&1&-1&0&1\\0&0&-1&-5&1&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&3&0&-2\\0&1&1&-1&0&1\\0&0&1&5&-1&-3\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-2&1&1\\0&1&0&-6&1&4\\0&0&1&5&-1&-3\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-6&1&4\\5&-1&-3\end{pmatrix}.$$

值得注意的是，对 $(A\mid E)$ 用初等行变换求逆矩阵 A 时，必须始终用初等行变换，其间不能做任何初等列变换．且在求一个矩阵的逆矩阵时，不必考虑这个矩阵是否可逆，只要在用初等行变换的过程中，发现这个矩阵不能化成单位矩阵，则它就没有逆矩阵．

如果构造矩阵 $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}$，那么对该矩阵做初等列变换，则也有

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{c}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 3 将矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，求解矩阵方程 $AX=B$.

解 实际上我们有 $X=A^{-1}B$，构造矩阵 $(A \mid B)$，那么

$$(A \mid B) \xrightarrow{\text{r}} (E \mid A^{-1}B).$$

$$(A \mid B)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{r}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 13 \end{pmatrix}.$$

故

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -8 & -16 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}.$$

§3.3 矩阵的秩

通过观察可以看到，一个矩阵变成行阶梯形或标准形后，行阶梯形和标准形不全为零行的个数必定是确定的，这个数其实就是我们要讨论的矩阵 A 的**秩**.

矩阵的秩是矩阵的重要特性之一，它在线性方程组解的存在性讨论中起着关键的作用．如果 $A \sim B$，则 A 和 B 有相同的标准形，这意味着等价矩阵有相同的秩．但是我们可以先抛开初等变换直接利用矩阵子式的概念来对秩下定.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{k}$ 阶子式: 由 A 中任意 k 行 k 列的元素相对位置不变构成的行列式.

注 若 A 是 $m \times n$ 的矩阵，则 A 中 k 阶子式的个数为 $C_m^k \times C_n^k$.

定义 3.1 若矩阵 A 中有 r 阶的子式 D_r 不为零，而所有的 $r+1$ 子式都为零，则称 D_r 为最高阶的非零子式，并称 r 为矩阵 A 的**秩**，记为 $\boldsymbol{R(A)}$.

例如，容易判矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩为 2.

根据定义 3.1，我们容易判断：

1. $R(A) \le m$ 且 $R(A) \le n$.

2. 在 $R(A)=0 \Leftrightarrow A=0$.

3. 若 $R(A)=r$，则 A 中有 r 阶的子式 D_r 不为零，而所有的大于等于 r 阶的全为零；反过来，若 $s<r$，则必有某 r 阶子式不为零.

4. $R(A)=R(A^T)$.

5. 如果 A 为 n 阶方阵，可得 A 可逆的充分必要条件是 $R(A)=n$．所以我们也称可逆阵为**满秩矩阵**，不可逆阵为**降秩矩阵**.

6. 行阶梯形矩阵的秩即为不全为零行（非零行）的个数.

我们更想知道的是，由此定义，是否可推得下面的结论？

定理 3.1　若 $A \sim B$，则 $R(A)=R(B)$.

注　由定理 3.1，当我们把矩阵 A 用矩阵的初等行变换化为行阶梯形矩阵，则阶梯形矩阵中非零行的个数即为 A 的秩.

证明定理 3.1 我们只需证明对一次初等行（列）变换，矩阵的秩不发生改变即可．故我们只需讨论三种情形：

- $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$.
- $A \xrightarrow{\lambda r_i} B$.
- $A \xrightarrow{r_j+\lambda r_i} B$.

先设 $R(A)=s, R(B)=t$，实际上我们只需证明 $s \le t$，那么 A 中有 s 阶的最高阶非零子式 D.

若 $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$，分三种情况：$D$ 中不含 A 中的第 i 行和第 j 行；D 中含有 A 中的第 i 行和第 j 行；D 中含有 A 中的第 i 行和第 j 行之一，不妨假设在这种情形下 D 中含有 A 中的第 i 行但不含第 j 行，我们在 B 中选择子式，除了把 D 所在的列第 i 行换成第 j 行，而其它的行和列与 D 所有的行和列一样．故可得 $s \le t$.

若 $A \xrightarrow{\lambda r_i} B$，则容易证明结论成立.

若 $A \xrightarrow{r_j+\lambda r_i} B$，则容易证明结论成立.

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 11 \\ 1 & 2 & -3 & -14 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 28 \end{pmatrix}$的秩.

解 $A=\begin{pmatrix}1&2&2&11\\1&2&-3&-14\\3&1&1&3\\2&5&5&28\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-3r_1}}\begin{pmatrix}1&2&2&11\\0&0&-5&-25\\0&-5&-5&-30\\0&1&1&6\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_4\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&11\\0&1&1&6\\0&-5&-5&-30\\0&0&-5&-25\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+5r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&11\\0&1&1&6\\0&0&0&0\\0&0&-5&-25\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&2&2&11\\0&1&1&6\\0&0&-5&-25\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 r（A） $R(A)=3$.

例 2 求矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&3&2\\-2&-1&1\\2&-1&-3\\3&5&4\\1&-3&-2\end{pmatrix}$ 的秩.

解得 $R(B)=3$.

例 3 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\3&\lambda&-1&2\\5&3&\mu&6\end{pmatrix}$ 的秩为 2，求 λ 和 μ .

解得 $\begin{cases}\lambda=5\\\mu=1\end{cases}$.

由定理 3.1，我们可以推出如下的一些结论：

推论 1 若 P,Q 可逆，则 $R(PAQ)=R(A)$.

推论 2 $\max\{R(A),R(B)\}\le R(A,B)\le R(A)+R(B)$.

推论 3 $R(A+B)\le R(A)+R(B)$.

推论 4 $R(AB)\le R(A)$ 且 $R(AB)\le R(B)$（放下节证明）. 如果 A 是可逆的，那么我们可得到 $R(AB)=R(B)$.

注 该节略去教材中的一些理论结论．

§3.4 线性方程组的解

对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组，当它的系数行列式不为零时，我们已经学过两种求解方法：⑴克莱姆法则；⑵逆矩阵．它们实际上都是消元法的变形．

对于一般的未知数个数与方程个数可能不相等的线性方程组，本节将运用矩阵的初等变换方法来讨论一般的线性方程组的解．先考察先面的两个例子．

例 1 讨论线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=2 \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=4 \\ x_1-2x_2-5x_3+x_4=0 \end{cases}$的解．

解 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3)-r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

最后一个矩阵对应于方程组：$\begin{cases} x_1-x_3=1 \\ x_2+2x_3-\frac{1}{2}x_4=\frac{1}{2} \end{cases}$，因此有$\begin{cases} x_1=1+x_3 \\ x_2=\frac{1}{2}-2x_3+\frac{1}{2}x_4 \end{cases}$．

由于当 x_3 和 x_4 分别任意取定一个值时，都可得到方程组的一组解，因此该方程组有无穷多组解．注意，我们这里称 x_3 和 x_4 为**自由未知量**．

例 2 讨论方程组$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4=6 \\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4=8 \\ 4x_1-3x_2+8x_3-4x_4=10 \end{cases}$ 的解．

解 $\tilde{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 5 & -3 & 6\\ 2 & 1 & 2 & -2 & 8\\ 4 & -3 & 8 & -4 & 10\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{7}{5} & -1 & \frac{11}{5}\\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

最后一个矩阵对应于方程组：$\begin{cases}x_1+\frac{7}{5}x_3-x_4=\frac{11}{5}\\ x_2-\frac{4}{5}x_3=\frac{3}{5}\\ 0=3\end{cases}$，其中第三个方程 0=3 是不可能成立的．因而方程组无解．

从以上两个例子最后得到的两个矩阵来看，它们直接决定了方程组的解．

我们可以给出另一组和方程有解无解等价的说法：若方程组有解，则称方程组是**相容的**；若方程组无解，则称方程组是**不相容的**．

一个含有 n 个未知数的 m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases},$$

可表示为 $Ax=b$.

它的增广矩阵

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{pmatrix}$$

一般经过适当的行初等变换，它的左上角会出现一个 r 阶的单位矩阵（$r\le n$），而在以下（$m-r$）各行，除去最后一列可能有非零元素外，其余的元素均为零. 即增广矩阵 $\widetilde{A}$ 经过行初等变换后可化成以下形式，其中 $r\le n$：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1\ r+1} & \cdots & a'_{1n} & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2\ r+1} & \cdots & a'_{2n} & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{r\ r+1} & \cdots & a'_{rn} & c_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从上面的矩阵形式可以看到，方程组有解的充分必要条件是 $c_{r+1}=0$，否则方程组有矛盾方程 $0=c_{r+1}$.

归纳上述讨论，得到如下两个定理：

定理 1　线性方程组 $Ax=b$ 有解的充分必要条件是它的系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等，即 $R(A)=R(A,b)$．并且

- **$R(A)=R(A,b)=n$，则方程组的解是唯一的；**
- **$R(A)=R(A,b)<n$，则方程组有无穷多组解．**

例 3 判别方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=13 \\ 2x_1+3x_2+x_3=4 \\ 3x_1-x_2+2x_3=-1 \\ x_1-x_2+3x_3=-8 \end{cases}$的相容性.

解　因为 $\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 13 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & 7 & -22 \\ 0 & -7 & 11 & -40 \\ 0 & -3 & 6 & -21 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_4-3r_2]{r_3-7r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & 7 & -22 \\ 0 & 0 & -38 & 114 \\ 0 & 0 & -15 & 45 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_2 \\ -\frac{1}{38}r_3 \\ -\frac{1}{15}r_4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & -7 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & -7 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 R（A）=R（$\widetilde{A}$）=3，即方程组是相容的．

例 4　当 a 取什么值时，方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3-3x_4=a \\ x_2+2x_3+6x_4=3 \end{cases}$有解，并求出它的解．

解　因为 $\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -6 & a-3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -6 & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

所以当 $a\neq0$ 时，R（A）=2，R（$\widetilde{A}$）=3，方程组无解；

当 a=0 时，R（A）=R（$\widetilde{A}$）=2，方程组有解．这时，对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1-x_3-5x_4=-2 \\ x_2+2x_3+6x_4=3 \end{cases},$$

即

$$\begin{cases} x_1=-2+x_3+5x_4 \\ x_2=3-2x_3-6x_4 \end{cases},$$

其中 x_3 与 x_4 的值可以任取，令 x_3=c_1，x_4=c_2，则方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=-2+x_3+5x_4 \\ x_2=3-2x_3-6x_4 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases},$$

其中 c_1 与 c_2 为任意常数．

齐次线性方程组：在线性方程组中，若 b_1=b_2=…=b_m=0，则方程组称为齐次线性方程组，即形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

简记作 $Ax = 0$．显然它的增广矩阵与系数矩阵的秩是相等的．因此根据定理 1 可知，齐次线性方程组总有零的．并且可以得到以下定理：

定理 2 设有齐次线性方程组 $Ax = 0$，

- **若 $R(A) = n$，则方程组 $Ax = 0$ 只有零解；**
- **若 $R(A) < n$，则方程组 $Ax = 0$ 有无穷多组非零解.**

由此，第一章§ 6 的定理 2 的逆命题也成立，即有

定理 3 齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$

有非零解的充分必要条件是它的系数行列式 $|A| = 0$.

例 6 解方程组 $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 8y + 3z = 0 \\ -8x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$.

解 计算系数行列式：$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -8 & 3 \\ -8 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

所以方程组有无穷多组解．为此写出它的增广矩阵，并作行初等变换如下：

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -8 & 3 & 0 \\ -8 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

这时，对应的方程组为 $\begin{cases} x - \frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$．设 $z=c$，则方程组的解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}c \\ y = \dfrac{1}{2}c \\ z = c \end{cases}.$$

写成矩阵（向量）的形式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

我们可以推广定理 1 的结论到更一般的矩阵方程情形，即讨论 $AX = B$ 的解.

定理 3 矩阵方程 $AX = B$ 有解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, B)$.

证 不妨设 A 是 $m \times n$ 的矩阵， B 是 $m \times l$ 的矩阵，则 X 是 $n \times l$ 的矩阵. **由此可把**矩阵方程 $AX = B$ 看成 l 个线性方程组.

由此定理可导出上一节的一个重要性质：

定理 4 设 $AB = C$，则 $R(C) \le R(A)$ 且 $R(C) \le R(B)$.

证 注意到 $R(C) \le R(A, C) = R(A)$ 即可.

第四章 向量组的线性相关性

§4.1 线性组合和线性表示

n 维行向量$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$. 一般记成, 简记作$\alpha,\beta$.

n 维列向量$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. 一般记成, 简记作$\alpha^T,\beta^T$.

线性空间$\mathbf{R}^n$: 由所有的 n 维行向量或列向量构成的集合, 向量之间可以做加法和数乘运算.

我们称线性空间$\mathbf{R}^n$中的某些向量构成的集合为向量组, 如$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m\in \mathrm{R}^n$, 则称集合$A=\{\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m\}$ 为一个向量组, 也可记成$A:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$.

注意, 我们约定在没有明确指出时向量都是n维的, 符号$\alpha,\beta,\cdots$总是列向量, 当我们要表示行向量时,总是记成$\alpha^T,\beta^T,\cdots$,而有限个向量构成的向量组中向量的个数一般记成 m 个.

我们本章要研究的是向量组中的向量和向量的关系以及不同向量组之间的关系.

联系于矩阵, 我们也用A来表示一个矩阵, 看起来这里存在符号的"滥用", 但实际上这里的问题不大, 因为一个向量组按照一定的约定来写就是一个矩阵.

联系于**线性方程组:**

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_n \end{cases}$$

我们知道它对应是增广矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

把增广矩阵的每一列看成一个列向量, 则可见矩阵对应着一个 m 维的列向量组,

同样也对应着一个 n 维的行向量组. 增广矩阵可记成

$$(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n,b).$$

而方程组对应着如下的向量运算等式

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b.$$

对应着上面的向量运算等式,我们可以给出**线性组合**和**线性表示**的定义.

定义 1 设有向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$，对任意的一组实数 $k_1,k_2\cdots,k_m$，称线性运算

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

为向量组 A 的**线性组合**，$k_1,k_2\cdots,k_m$ 为组合系数.若

$$b=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m,$$

则称 b 能由组 A 的**线性表示**.

注意 线性表示的存在性等价于线性方程组解的存在性问题. 于是根据 §3.4 定理 1, 我们立即有以下结论成立.

定理 1 设有向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m,b$,则 b 能由组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 的线性表示的充分必要条件是 $R(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m)=R(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m,b)$.

例 1 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$,证明 b 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示出来.

解 设

$$B=(A,b)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,b)=\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\3&2&1&-1\\1&-2&-5&1\end{pmatrix},$$

而

$$\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\3&2&1&-1\\1&-2&-5&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故 b 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示出来, 并可写出具体的表示式.

下面我们把线性表示的概念再推广一下.

定义 2 设有向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$，$B:\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_t$，若向量组 B 中的每一个向量可由向量组 A 线性表示,则称向量组 B 可由 A 线性表示. 反过来若也有 A 可由 B 线性表示, 则称向量组 A 与 B 等价.

注意, 如果矩阵 $A\xrightarrow{r}B$, 那么行向量组等价; 如果 $A\xrightarrow{C}B$, 那么列向量组等价

若 B 可由 A 线性表示, 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s)$，$B=(\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_t)$ 则对应着如下的矩阵的运算

(*)
$$(\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_t)=(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{t1} \\ k_{12} & k_{21} & \cdots & k_{t1} \\ & \cdots & \cdots & \\ k_{1s} & k_{2s} & \cdots & k_{ts} \end{pmatrix}.$$

记

$$K_{st}=\begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{t1} \\ k_{12} & k_{21} & \cdots & k_{t1} \\ & \cdots & \cdots & \\ k_{1s} & k_{2s} & \cdots & k_{ts} \end{pmatrix},$$

即有 $B=AK$，我们称 K_{st} 为向量组 A 到 B 的**过渡矩阵**.

容易看到, 向量组 B 能否由 A 线性表示 $\Leftrightarrow AX=B$.

建立在向量组之间的线性表示和矩阵运算之间的对应上, 我们可以给出如下的定理.

定理 2 向量组 $B:\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_t$ 可由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 线性表示的充分必要条件是 $R(A)=R(A,B)$.

证明 首先若向量组 $B:\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_t$ 可由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$,线性表示, 即有 (*) 式成立, 经对应着 (*) 式施行列变换, 有

$$(A,B)\sim(A,0),$$

故 $R(A,B)=R(A)$.

其次若 $R(A)=R(A,B)$，则也有 $R(A)=R(A,\beta_i)$, $1\le i\le t$, 故线性方程组解的存在性可知 β_i 可由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 线性表示出来. □

在上面的证明中, 同时我们还得到 $R(B)\le R(A)$, 也就是证明了下面的结论.

推论 1 若向量组$B:\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_t$可由向量组$A:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$线性表示，则有

$$R(B)\le R(A).$$

推论 2 若$B=AK$，则$R(B)\le R(A)$且$R(B)\le R(K)$.

推论 3 若向量组$B:\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_t$与向量组$A:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 等价，则

$$R(A)=R(B)=R(A,B).$$

总结: 问一个向量组B能否由A线性表示的问题等价于$AX=B$解的存在性问题，我们建立在矩阵秩的基础上来判断. 我们还可以继续问，具体怎么把向量组B用A线性表示出来的，也就是矩阵方程

$$AX=B$$

具体怎么求解问题. <u>我们用一个具体的例子来解决这个问题.</u>

例 2 设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与向量组$\beta_1,\beta_2$等价，并把向量组用向量组表示出来.

证明 记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\beta_1,\beta_2)$，由

$$(A,B)\sim\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\0&2&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

可得$R(A)=R(B)=R(A,B)=2$，故向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与向量组$\beta_1,\beta_2$等价.

进一步做初等变换，有

$$(A,B)\sim\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是可得

$$\beta_1=-\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2+0\alpha_3,\ \beta_2=\frac{3}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2+0\alpha_3.$$

§4.2 向量组的线性相关性

定义 1 设有向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$，若存在一组不全为 0 的实数 $k_1,k_2\cdots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0,$$

则称向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ **线性相关**，否则称向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ **线性无关**.

所谓线性无关，也就是说若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则必定 $k_1,k_2\cdots,k_m$ 全为 0，如下例.

例 1 证明向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ 线性无关.

例 2 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，并且 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$ 以及 $\beta_3=\alpha_2+\alpha_3$，试判断向量组的线性相关性.

联系上一节的概念，我们立即有如下结论.

定理 1 向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充分必要条件是存在一个向量可由其它 $m-1$ 个向量线性表示.

向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 是否线性相关的问题直接联系齐次线性方程有没有非 0 解的问题.

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases},$$

联系于系数矩阵的秩，故有如下结论.

定理 2 向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充分必要条件是 $R(A)<m$.

由该定理，我们可以利用初等变换来判断一个向量组的线性相关性.

例 3 判断向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\\5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\5\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}11\\-14\\3\\28\end{pmatrix}$ 的线性无关性.

解 设

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&2&11\\1&2&-3&-14\\3&1&1&3\\2&5&5&28\end{pmatrix}.$$

而

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2&11\\1&2&-3&-14\\3&1&1&3\\2&5&5&28\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2&11\\0&1&1&6\\0&0&-5&-25\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $R(A)=3$, 所以向量组线性相关.

追加问题: 判断向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\\5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\5\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}11\\-14\\3\\28\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\-4\\3\\8\end{pmatrix}$ 的线性无关性. 由此说明两个问题: a) 线性相关的向量组再增加向量必线性相关; b) 向量组中向量的个数大于向量的维数, 则该向量组必线性相关.

定理 3 设向量组 A 由 m 个 n 维向量构成, 若 $n<m$, 则向量组 A 线性无关.

在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中,单位向量组 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性无关,而由定理 3, 任取 $n+1$ 个向量一定线性相关. 若另有 n 个向量 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$ 线性无关, 则由于

$$R(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n,e_i)=n,$$

于是可知 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 与 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$ 等价.

定理 4 设向量组 A:$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性相关, 则 B:$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 线性相关.

定理 5 (第 5 版没有该定理)设向量组 A:$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性无关, 这里

$$\alpha_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{nj}\end{pmatrix},\quad j=1,2,\cdots,m.$$

设

$$\beta_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\\vdots\\a_{nj}\\a_{(n+1)j}\end{pmatrix},\quad j=1,2,\cdots,m,$$

则向量组 B:$\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_m$ 线性相关.

<u>初等变换与线性相关性</u>**:** 矩阵 A 进行初等行变换到 B，则 A 与 B 的行向量组等价，而列向量保持相同的线性相关性.

§4.3 向量组的秩

我们已经知道, 在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中,单位向量组 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性无关,而由上节定理 3, 任取 $n+1$ 个向量一定线性相关. 这意味着任一个向量可由 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性表示出来, 也就是说 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是有代表性的 n 个向量. 我们正是在此意义下给出如下的定义.

定义 1 设有向量组 A, 若

(1) 其中 r 个向量构成的向量组 $A_0:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_r$ 线性无关;

(2) 任意 $r+1$ 个向量构成的向量组线性相关,

则称向量组 $A_0:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_r$ 为向量组 A 的**最大线性无关组**(或称**极大线性无关组)**, 并称否则称**向量组 A 的秩**为 r ,记作 $R_A=r$.

注 1) 向量组 0 的秩为 0;

2) 基本逻辑:若向量组 A 的秩为 r ,则任意的向量个数大于 r 的向量组都线性相关.

n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的秩为 n.

A **的行(列)秩**: A 中行(列)向量组构成的秩.

定理 5 矩阵的秩等于它的行秩和列秩.

证 因 $R(A^T)=R(A)$,故只需证明矩阵的秩等于它的行秩,这可以由前面给出

的线性相关性的判断方法很容易地得到. □

我们有如下等价定义.

定义 1` 设有向量组 A, 若

(1) 其中 r 个向量构成的向量组 $A_0:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_r$ 线性无关;

(2) 任取 A 中一向量可由向量组 $A_0:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_r$ 线性表示,

则称向量组 $A_0:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_r$ 为向量组 A 的**最大线性无关组**(或称**极大线性无关组)**, 并称否则称**向量组 A 的秩**为 r.

注意, A 中任一向量可由向量组 $A_0:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_r$ **唯一地**线性表示.

把这里的概念运用于齐次线性方程组, 例如

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=0 \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4=0 \\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4=0 \end{cases}$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} -\dfrac{7}{5} \\ \dfrac{4}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

则意味着, 该方程组的解向量组的秩为 2, 和自由未知量的个数一样, **那么和系数矩阵的秩有什么关系?**

联系于上一节的定理 2 及其推论, 我们有

定理 1 **若向量组 $B:\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_t$ 可由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 线性表示, 则有**

$$R_B\le R_A.$$

推论 1 **若向量组 $B:\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_t$ 与向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 等价, 则有**

$$R_B=R_A.$$

例 1 设有列向量组构成的矩阵为

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

求它的最大线性无关组, 并把其它向量用最大线性无关组表示出来.

解 由

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&-1&2\\3&2&1&-1&4\\1&-2&-5&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0&1\\0&1&2&-\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故它的最大线性无关组可取为α_1,α_2，而其中$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$.

再进一步地理解<u>初等变换与线性相关性</u>**:** 矩阵A进行初等行变换到B，则A与B的行向量组等价，而列向量保持相同的线性相关性.

§4.4 线性方程组解的结构

在一节的例中, 我们已经看到一个齐次线性方程组的解向量组有一个清晰的线性相关性结构, 其实对任一个齐次线性方程组都有类似的结构, 而非齐次线性方程组的结构与此相关, 但又有不同的地方. 这些问题正是本节要讨论的线性方程组解的结构问题, 我们将对此问题做一个一般的阐述.

一. 齐次线性方程组解的结构

齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$$

简记作$Ax=0$. 立即可得如下结论.

性质 1 若向量ξ_1和ξ_2都是齐次线性方程组$Ax=0$的解, 则$\xi_1+\xi_2$也是$Ax=0$的解.

性质 2 若向量ξ_1是齐次线性方程组$Ax=0$的解, 则$k\xi_1$也是$Ax=0$的解.

那么若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$是$Ax=0$的任一组解, 则$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$也有

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$$

也是$Ax=0$的解. 但这里的向量都是n维的, 故最多只有n个线性无关的向量构成最大无关组, 不妨还是设为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$, 那么由性质 1, 2, 可知

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$$

是$Ax=0$的通解. 我们称这里的$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$是$Ax=0$的**基础解系**, 而所有的解构成的集合为**解空间**.

利用矩阵的实行变换可以看到:

$$s = n - R(A) = n - r.$$

定理 1 若齐次线性方程组 $Ax = 0$ 系数矩阵的秩 $R(A)$ 为 r, 则

$$s = n - R(A) = n - r.$$

例 1 解齐次线性方程组 $Ax = 0$，这里

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

二. 齐次线性方程组解的结构

非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

可表示为 $Ax = b$.

性质 1 若向量 ξ_1 和 ξ_2 都是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解, 则 $\xi_1 - \xi_2$ 是齐次方程组组 $Ax = 0$ 的解.

性质 2 若向量 ξ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解, 而向量 ξ^* 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解, 则 $\xi + \xi^*$ 是非齐次方程组组 $Ax = b$ 的解.

结合齐次方程组解的结构, 则非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的通解为

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_s\xi_s + \xi^*.$$

例 2 讨论线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ 的解.

解

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1 & -1 & 4\\ 1 & -2 & -5 & 1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

则有同解方程组

$$\begin{cases}x_1=1+x_3\\ x_2=\dfrac{1}{2}-2x_3+\dfrac{1}{2}x_4\end{cases}.$$

自由未知量为 x_3,x_4. 分别在对应的齐次方程中取 $\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, 在非齐次方程里取 $\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, 则得通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

注意, 本节涉及的理论在证明中有广泛的应用.

例 3 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知 η_1,η_2,η_3 是它的三个解向量. 且

$$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 4\\ 5\end{pmatrix},\quad \eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}$$

求该方程组的通解.

解 由于矩阵的秩为 3，$n-r=4-3=1$，故其对应的齐次线性方程组的基础解系含有一个向量，且由于 η_1,η_2,η_3 均为方程组的解，由非齐次线性方程组解的结构性质得齐次方程组的解

$$2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)=(\eta_1-\eta_2)+(\eta_1-\eta_2)=\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 5\\ 6\end{pmatrix}$$

为其基础解系，故此方程组的通解：

$$x=k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}，\quad (k\in R).$$

例 4 设n阶矩阵A满足$A^2=A, E$为n阶单位矩阵,证明

$$R(A)+R(A-E)=n.$$

证 因

$$A(A-E)=A^2-A=A-A=0,$$

故知 $R(A)+R(A-E)\le n$ (这是利用了命题:若有 $AB=0$，则 $R(A)+R(B)\le n$. 可在此简证)．又 $R(A-E)=R(E-A)$，则

$$R(A)+R(A-E)=R(A)+R(E-A)\ge R(A+E-A)=R(E)=n,$$

(这是利用了命题: $R(A+B)\le R(A)+R(B)$)

所以$R(A)+R(A-E)=n$.

例 5 设$m\times n$的矩阵A对任意n维列向量x都有$Ax=0$， 证明A为零矩阵.

证：因矩阵A对任意n维列向量x都有$Ax=0$,

故取n维空间R^n的任一组线性无关的向量组$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，不妨设

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\xi_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

有$A\xi_1=0,\cdots,A\xi_n=0$．令矩阵$B=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，则$AB=0$，且$B$可逆．那么

$AB=0B^{-1}=0$，即A为零矩阵，得证.

例 6 设$m\times n$的矩阵A满足$R(A^TA)=R(A)$.

注意, 本章可以处理很多证明题, 需要我们写出完整的推理过程，遵循由条件出发，依据定义、基本定理或性质，得出明确的结论.

§4.5 向量空间

我们称$\mathbf{R}^n$为n维向量空间, 但向量空间的形式不仅如此, 本节将把此概念

推广到更一般情形. 例如, 我们称齐次线性方程组的解构成了解空间, 之所以有这种称谓, 主要的原因是其线性运算具有**封闭性**.

定义 1 设 $S\subset\mathbf{R}^n$, 若满足:

(1) 任取 $x,y\in S$, 则 $x+y\in S$ (加法封闭性);

(2) 任取 $x\in S$, $k\in\mathbf{R}$, 则 $kx\in S$ (数乘封闭性);

则称 S 为**向量空间** (**线性空间**).

例如, $\mathbf{R}^n$ 本身是向量空间, 齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解构成向量空间, 即所谓**解空间**, 但非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解不构成解空间.

例 1 $V_0=\{x\mid x=(0,x_2,\cdots,x_n),\ x_i\in\mathbf{R}\}$ 是向量空间.

例 2 $V_1=\{x\mid x=(1,x_2,\cdots,x_n),\ x_i\in\mathbf{R}\}$ 不是向量空间.这里

$$0\cdot(1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\ 0,0,\cdots,0\ )\notin V_1,$$

即数乘运算不封闭.

例 3 给定 n 维向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ $(m\geq 1)$, 验证

$$V=\{\alpha\mid\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m,\ k_i\in\mathbf{R}\}$$

是向量空间. 称之为由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 生成的向量空间, 记作 $\mathrm{span}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$.

如果在上例中, 我们还要求 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关, 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 是 V 中的一个最大无关组, V 中任一向量可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 唯一地线性表示.我们在任一向量空间中专门给出相应的概念.

定义 2 设 S 是向量空间, 若 S 中的向量组 $A_0:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_r$ 满足:

(1) $A_0:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_r$ 线性无关;

(2) 任取 S 中一向量可由向量组 $A_0:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_r$ 线性表示,

则称向量组 $A_0:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_r$ 为向量空间 S 的**基**, 并称 r 为向量空间 S 的**维数.**

注 1. 显然向量空间 S 的**基**和**维数**也就是它作为一个向量组的**最大无关组**和**秩**. 但一般的向量组并不能保证最大无关组的线性组合还在这个向量组中, 也就是说它不一定有线性运算的**封闭性**.

2. 当确定了向量空间 S 的基 $A_0:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_r$, 那么向量空间可以表示为

$$S=\{\alpha\mid\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r,\ k_i\in\mathbf{R}\}.$$

我们称 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 为向量 α 关于基 $A_0:\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_r$ 的**坐标**.

3. 若向量空间 S 的维数为 r, 则中任意个线性无关的向量都是它基.

4. 齐次线性方程组 $Ax=0$ 的**基础解系**也就是**解空间**的一组**基**，它的**维数**也就是 $n-r$.

例 4 设有向量空间 S 的一组基

$$\alpha_1=(1,1,1,1)^T,\alpha_2=(1,1,-1,1)^T,\alpha_3=(1,-1,-1,1)^T,$$

试求 $\alpha=(1,2,1,1)^T$ 在该基下的坐标.

解 设 $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，它等价于下面求方程组的解

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$$

解得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}.$$

第五章　矩阵特征值与相似变换

§5.1 向量的内积及正交性

引子: 三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 上的向量及其运算有明确的几何意义, 前面内容只涉及线性运算, 并没有涉及向量的**夹角**, **长度**, **内积**和**正交**这些几何概念. 本章将一般的 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 上来讨论这些概念.

定义 1 设有向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$, 则称

$$[\alpha,\beta]=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\alpha^T\beta$$

为 α 与 β 的**内积**.

<u>内积的性质:</u>

设 α,β,γ 是向量, $k\in\mathbf{R}$, 则

(1) 任取向量 α, 有 $[\alpha,\alpha]\ge 0$; 当 $[\alpha,\alpha]=0$ 时, $\alpha=0$.

(2) $[\alpha,\beta]=[\beta,\alpha]$

(3) $[k\alpha,\beta]=k[\alpha,\beta]$ （$\boldsymbol{k}$ 为常数）

(4) $[\alpha+\beta,\gamma]=[\alpha,\gamma]+[\beta,\gamma]$

柯西－施瓦兹不等式:

$$[\alpha,\beta]^2\le[\alpha,\alpha]\cdot[\beta,\beta].$$

证 $\forall t\in\mathbf{R}$, 由 $[\alpha+t\beta,\alpha+t\beta]\ge 0$, 可得

$$[\alpha,\alpha]+2[\alpha,\beta]t+[\beta,\beta]t^2\ge 0.$$

由判别公式, 可得

$$4[\alpha,\beta]^2-4[\alpha,\alpha]\cdot[\beta,\beta]\le 0$$

即有

$$[\alpha,\beta]^2\le[\alpha,\alpha]\cdot[\beta,\beta].$$

定义 2 设 α 是向量, 称实数 $\|\alpha\|=\sqrt{[\alpha,\alpha]}$ 为 α 的**范数**.

<u>范数的性质:</u>

设α是向量，$k\in\mathbf{R}$

(1) $\|\alpha\|\ge 0$；当$\|\alpha\|=0$时，$\alpha=0$.

(2) $\|k\alpha\|=|k|\cdot\|\alpha\|$

(3) $\|\alpha+\beta\|\le\|\alpha\|+\|\beta\|$

(4) $\|\alpha\|-\|\beta\|\le\|\alpha-\beta\|$

证 (3) $\|\alpha+\beta\|^2=[\alpha+\beta,\alpha+\beta]=[\alpha,\alpha]+2[\alpha,\beta]+[\beta,\beta]$

$$\le\|\alpha\|^2+2\|\alpha\|\|\beta\|+\|\beta\|^2=\left(\|\alpha\|+\|\beta\|\right)^2$$

(4) 设$\gamma=\alpha-\beta$，则$\alpha=\beta+\gamma,\beta=\alpha+(-\gamma)$，由此可得

$$\|\alpha\|\le\|\beta\|+\|\gamma\|\Rightarrow\|\alpha\|-\|\beta\|\le\|\gamma\|,$$

$$\|\beta\|\le\|\alpha\|+\|\gamma\|\Rightarrow\|\alpha\|-\|\beta\|\ge-\|\gamma\|.$$

单位化：若$\alpha\ne 0$，称$\alpha_0=\dfrac{1}{\|\alpha\|}\alpha$为与$\alpha$ (同方向) 的**单位向量**.

定义 3 设向量$\alpha\ne 0$，$\beta\ne 0$，称 $\varphi=\arccos\dfrac{[\alpha,\beta]}{\|\alpha\|\|\beta\|}$ $(0\le\varphi\le\pi)$为α与β之间的夹角.

若$[\alpha,\beta]=0$，则称α与β正交，记作$\alpha\perp\beta$. 并且

(1) 当$\alpha\ne 0$，$\beta\ne 0$时，$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{2}$；

(2) $\alpha=\theta$或$\beta=\theta$时，$\alpha\perp\beta$，而φ无意义或理解成可以取任意值.

<u>**勾股定理:**</u> 若$\alpha\perp\beta$，则

$$\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2.$$

定理 1 **若**$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$**一组两两正交的非** 0 **向量，则向量组**$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$**线性无关**.

证 令

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0.$$

则两边同时做内积，有

$$k_1[\alpha_1,\alpha_1]+k_2[\alpha_2\alpha_1]+\cdots+k_r[\alpha_r\alpha_1]=0$$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 两两正交，故 $k_1=0$，同理可得对所有的 i，有 $k_i=0$. 因此向量组

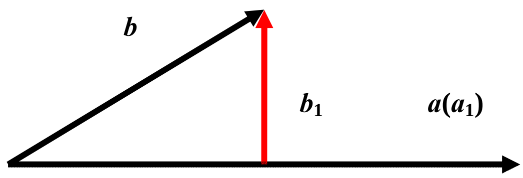
$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关. □

定义 4 设 $S\subset\mathbf{R}^n$ 是向量空间，若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$ 是 S 中的一组基且两两正交，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$ 是 S 中的一组**正交基**; 若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$ 还都是单位向量，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$ 是 S 中的一组**规范正交基**.

例 1 在欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中，自然基 $e_1,e_2,\ldots,e_n$ 是一组规范正交基.

若 $S\subset\mathbf{R}^n$ 是向量空间， $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$ 是 S 中的一组**规范正交基**，则任取一向量 α ,它在 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$ 下的**坐标**为 $[\alpha,\alpha_i]$, $i=1,2,\cdots,m.$

问题:从向量空间 S 的任一组线性无关的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$ 出发,如何构造出一个两两正交向量组呢？比如在 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$ 中有两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,我们可以用如下的几何方法得到两个正交的向量 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$:



在此，我们给出**施密特正交化方法**: 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$ 线性无关

◆ 正交化：令

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

… …

$$\beta_m=\alpha_m-\frac{(\alpha_m,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_m,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_m,\beta_{m-1})}{(\beta_{m-1},\beta_{m-1})}\beta_{m-1}$$

◆ 单位化：

$$\eta_j=\frac{1}{\|\beta_j\|}\beta_j\quad(j=1,2,\cdots,m).$$

例 2 将向量组

$$\alpha_1=(1,-1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T,\alpha_3=(1,-1,1)^T$$

正交单位化.

解 令

$$\beta_1=\alpha_1,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,0,1)-\frac{1}{2}(1,-1,0)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1),$$

$$\begin{aligned}\beta_3&=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1\\&=(1,-1,1)-\frac{2}{3}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)-(1,-1,0)=(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}).\end{aligned}$$

再将 β_1,β_2,β_3 单位化得规范正交基:

$$\eta_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0),$$

$$\eta_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=(\frac{1}{\sqrt{6}},\quad\frac{1}{\sqrt{6}},\quad\frac{2}{\sqrt{6}}),$$

$$\eta_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=(\frac{-1}{\sqrt{3}},\quad\frac{-1}{\sqrt{3}},\quad\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

在上例中, 如果我们构造矩阵 $A=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$, 则立即可得 $A^TA=E$, 由此我们导出正交矩阵的概念.

定义 5 n 阶实矩阵 A 称为正交矩阵，如果 $A^TA=E$.

注: A 为 n 阶正交矩阵的充要条件是: A 的列向量组是 $\mathbf{R}^n$ 的一组规范正交基. 一般地, 设 $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一组规范正交基, 那么设

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$$

则有

$$A^TA=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_1^T\\ \vdots\\ \alpha_1^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1^Ta_1 & a_1^Ta_2 & \cdots & a_1^Ta_n\\ a_2^Ta_1 & a_2^Ta_2 & \cdots & a_2^Ta_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_n^Ta_1 & a_n^Ta_1 & \cdots & a_n^Ta_n\end{pmatrix}=I.$$

定理 2 设 A 为正交矩阵,我们称 $y=Ax$ 为正交变换.并且正交交换保持向量的内积、长度及向量间的夹角都保持不变，即任取向量 $x,y\in\mathbf{R}^n$, 有

$$(Ax,Ay)=(x,y),\quad \|Ax\|=\|x\|.$$

§5.2 特征值与特征向量

定义 1 设 A 为 n 阶方阵, 若有数 λ 和非 0 向量 x, 使得

$$Ax = \lambda x,$$

则称 λ 为 A 的**特征值**, 并称 x 为属于特征值 λ 的**特征向量**.

<u>基本问题:</u> 怎么求特征值和特征向量?

从 $Ax = \lambda x$ 出发, 可得

$$(A-\lambda E)x = 0 \text{或者} \ (\lambda E - A)x = 0.$$

我们知道, $(A-\lambda E)x = 0$ 有非零解等价于 $\det(A-\lambda E) = 0$. 具体的,

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}.$$

我们称 $\varphi(\lambda)$=$\det(A-\lambda E)$ 为矩阵 A 的**特征多项式**, 而称 $A-\lambda E$ 为矩阵 A 的特征**矩阵**. 计算可得特征多项式为

$$\varphi(\lambda)\text{=}\det(A-\lambda E) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n,\ a_0 = (-1)^n$$

由多项式根与系数的关系立即可得

定理 1　设矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则

(1) $trA = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;

(2) $|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

证 由特征值的定义可得

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda) + f_{n-2}(\lambda)$$

$$= (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + g_{n-2}(\lambda) + f_{n-2}(\lambda)$$

其中 $g_{n-2}(\lambda), f_{n-2}(\lambda)$ 都是次数不超过 $n-2$ 的多项式. 由题设, 又有

$$\varphi(\lambda) = \det(A-\lambda E) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$$

$$=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

比较多项式同次幂的系数可得

$$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$$

$$|A|=\varphi(0)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

推论 1　$\det A=0$ 等价于 0 是 A 的特征值.

例 1　求 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解　特征多项式为

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(\lambda+1)^2$$

得特征值 $\lambda_1=5,\lambda_2=\lambda_3=-1$

当 $\lambda_1=5$ 时，解特征向量：

$$A-5E=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

解得 $p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，即 $\lambda_1=5$ 时所有的特征向量为

$$x=k_1p_1\quad(k_1\neq 0).$$

当 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 时，解特征向量：

$$A-(-1)E=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解得 $p_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$p_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$,即 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 时所有的特征向量为

$$x=k_2p_2+k_3p_3\quad(k_2,k_3\text{ 不同时为 }0).$$

例 2　求 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解　特征多项式为

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda-1)^2$$

得特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=2$ 时，解特征向量：

$$A-2E=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得 $p_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，即得 $\lambda_1=2$ 时所有的特征向量为

$$x=k_1p_1\quad(k_1\neq 0).$$

当 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 时，解特征向量：

$$A-1E=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

解得 $p_2=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$，即 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 时所有的特征向量为

$$x=k_2p_2\quad(k_2\neq 0).$$

注　在例 1 中，对应 2 重特征值 $\lambda=-1$ 有两个线性无关的特征向量；在例 2 中，对应 2 重特征值 $\lambda=1$ 只有一个线性无关的特征向量.

一般结论：对应 r 重特征值 λ 的线性无关的特征向量的个数 $k\le r$.

定理 2　设 $Ax=\lambda x\ (x\neq 0)$，则

(1)　$A^k x=\lambda^k x$；

(2)　$f(A)x=f(\lambda)x$

(3) 若 A 可逆, 则 $A^{-1}x=\frac{1}{\lambda}x$.

例 3 设 A_3 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-3$，求 A^3-3A+E 的特征值,并求 $|A|$ 和 $\det(A^3-3A+E)$.

解 设 $f(t)=t^3-3t+1$，则 $f(A)=A^3-3A+E$ 的特征值为

$$f(\lambda_1)=-1, f(\lambda_2)=3, f(\lambda_3)=-17$$

而

$$|A|=1\times2\times(-3)=-6,\quad \det(A^3-3A+E)=(-1)\times3\times(-17)=51.$$

定理 3 **设 A 有互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，对应的特征向量为 $p_1,p_2,\cdots,p_m$，则向量组 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 线性无关.**

证 设数组 $k_1,\cdots,k_m$ 使得

$$k_1p_1+\cdots+k_mp_m=0$$

左乘 A，利用 $Ap_i=\lambda_ip_i$，$i=1,\cdots,m$,可得

$$k_1\lambda_1p_1+\cdots+k_m\lambda_mp_m=0$$

在上式中再左乘 A,依次下来可构造一个范德蒙形式的系数行列式，结论成立.

§5.3 相似矩阵

定义 1 设有方阵 A 和 B，若有可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$，则称 B 是 A 的**相似矩阵**，称可逆矩阵 P 为**相似变换阵**，并称 B 与 A **相似**，记作 $A\sim B$.

显然，相似是一种**等价关系**. 联系于特征值理论，我们有

定理 1 **若矩阵 A 与 B 相似，则 A 与 B 有相同的特征多项式和特征值.**

证 由 $P^{-1}AP=B$，可得

$$|B-\lambda E|=|P^{-1}||A-\lambda E||P|=|A-\lambda E|.$$

对角矩阵:

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

相似对角化: 方阵 A 与一个对角矩阵相似，称 A 可对角化. 也就是存在可逆矩阵 P 使得

$P^{-1}AP = \Lambda$.

注意，若矩阵 A 可对角化，则对角阵对角线上的元素正好就是矩阵 A 所有的特殊值，并且有

$$P^{-1}f(A)P = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

问题：是不是任何一个方阵可以对角化？以及怎么对角化？

定理 2 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

证 充分性．设 $p_1,\cdots,p_n$ 线性无关，且满足 $Ap_i = \lambda_i p_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$，

则 $P = \left(p_1, p_2, \cdots, p_n\right)$ 为可逆矩阵，那么

$$AP = \left(Ap_1, Ap_2, \cdots, Ap_n\right) = \left(\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \cdots, \lambda_n p_n\right) = \left(p_1, p_2, \cdots, p_n\right)\Lambda$$

必要性由充分性的反向过程立即可证． □

推论 1 若 A_n 有 n 个互异特征值,则 A_n 可对角化.

例 1 判断下列矩阵可否对角化：

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix},\quad (2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad (3)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

解 (1) 特征多项式为 $\varphi(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$，则 A 有 3 个互异特征值 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$，故 A 可对角化. 对应于三个特征值的特征向量依次为

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},\quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

构造矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$，$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$，则有

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

(2) 特征多项式为 $\varphi(\lambda) = -(\lambda-5)(\lambda+1)^2$，故有特征值 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$,解得相应的特征向量依次为

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad p_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

故构造矩阵

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

A 可对角化

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}5&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}.$$

(3) $\varphi(\lambda)=-(\lambda-2)(\lambda-1)^2$，在上节例 2 求得，$\lambda_2=\lambda_3=1$ 只对应于 1 个线性无关的特征向量，故 A 不可对角化.

注意，设 $A_{n\times n}$ 的全体互异特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，重数依次为 $r_1,r_2,\cdots,r_m$，若对应于每个特征值 $\lambda_i(i=1,\cdots,m)$ 的线性无关的特征向量正好是 r_i 个，则 A 可对角化.

例 2 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，求 A^{10}.

解 在上例中求得

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix}5&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix},$$

使得 $P^{-1}AP=\Lambda$，故有 $A=P\Lambda P^{-1}$ 以及 $A^k=P\Lambda^kP^{-1}$，那么

$$A^{10}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5^{10}&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5^{10}&5^{10}&5^{10}\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

§5.4 实对称矩阵的对角化

通过上一节的例子, 我们可以看到一个矩阵 A 不一定可以经相似变换对角化, 但如果 A 是实对称矩阵($A^{\mathrm{T}}=A, \overline{A}=A$, 这意味着 $\overline{A}^T=A$), 我们可以证明 A 可以对角化.

定理 1 实对称阵所有的特征值是实数.

证 设 $Ax=\lambda x\ (x\neq 0)$, $x=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$, 则有

$$\lambda(\overline{x}^T x)=\overline{x}^T(\lambda x)=\overline{x}^T Ax=\overline{x}^T(\overline{A}^T x)=\left(\overline{Ax}\right)^T x=\overline{\lambda}(\overline{x}^T x)$$

故

$$\left(\lambda-\overline{\lambda}\right)(\overline{x}^T x)=0$$

由于 $\overline{x}^{\mathrm{T}}x=|a_1|^2+|a_2|^2+\cdots+|a_n|^2>0$, 所以有 $\overline{\lambda}=\lambda$, 即 λ 为实数.

注 $(A-\lambda E)x=0$ 的解向量可取为实向量, 故约定：实对称矩阵的特征向量为实向量.

定理 2 实对称阵 A 的特征值 $\lambda_1\neq\lambda_2$,对应特征向量依次为 p_1,p_2,则 p_1 与 p_2 正交.

证 即证 $p_1^T p_2=0$. 由 $Ap_1=\lambda_1 p_1, Ap_2=\lambda_2 p_2$, 可得

$$\lambda_1(p_1^T p_2)=\left(\lambda_1 p_1\right)^T p_2=\left(Ap_1\right)^T p_2=p_1^T A^T p_2=p_1^T Ap_2=\lambda_2(p_1^T p_2).$$

则

$$\left(\lambda_1-\lambda_2\right)(p_1{}^T p_2)=0.$$

因 $\lambda_1\neq\lambda_2$,故 $p_1{}^T p_2=0$, 则 p_1 与 p_2 正交.

定理 3 设 $A^T=A$, 若 λ 是 A 的 r 重特征值, 则对应于特征值 λ 一定有 r 个线性无关的特征向量.（证略）

定理 4 设 A 为实对称阵, 则存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^T AQ=\Lambda$.

例 1 对下列矩阵 A, 求正交矩阵 P, 使得 $P^{\mathrm{T}}AP=\Lambda$：

$$(1)\ A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix},\qquad (2)\ \begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}.$$

解 (1) 特征多项式为 $f(\lambda)=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$, 故特征值为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=3$, 对应的特征向量依次为

$$p_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

定理保证它们两两正交. 构造正交矩阵 P 和对角矩阵 Λ：

$$P=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix},\ \Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 3\end{pmatrix}$$

则有 $P^{\mathrm{T}}AP=\Lambda$.

(2) 特征多项式为 $\varphi(\lambda)=-(\lambda-5)(\lambda+1)^2$，则特征值为 $\lambda_1=5$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$.

$\lambda_1=5$ 对应有特征向量为 $p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\lambda_2=\lambda_3=-1$ 对应有两个线性无关的特征向量：

$$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

正交化，得

$$p_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

构造正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\end{pmatrix},$$

则有

$$P^{\mathrm{T}}AP=\Lambda，这里\ \Lambda=\begin{pmatrix}5 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$$

例 2 设实对称矩阵 A_3 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=-3$，属于 λ_1,λ_2 的 特征向量

依次为 $p_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，求 A.

解　设 $p_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，由 $p_1\perp p_3$，$p_2\perp p_3$ 可得 $\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$

该齐次方程组的一个非零解为 $p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\0&1&-2\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&3&\\&&-3\end{pmatrix}$

则有 $P^{-1}AP=\Lambda\Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$.

§5.5 二次型及其标准形

(实)二次型:

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2&+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n\\&+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+a_{nn}x_n^2\end{aligned}$$

矩阵表示：设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx.$$

这里 $A^T=A$, $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 A 是一一对应关系，称 A 为 f 的矩阵，称 f 为 A 对应的二次型，并称 A 的秩为 f 的秩.

核心工作： 化二次型为**标准形**，即找一个可逆线性变换 $x=Cy$，$|C|\neq 0$，使得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2.$$

将二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的标准形写为矩阵形式

$$f=y^TDy,\ D=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}.$$

矩阵描述：

$$f=x^{\mathrm{T}}Ax=(Cy)^{\mathrm{T}}A(Cy)=y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)y$$

等价于对实对称矩阵 A，找可逆矩阵 C，使得 $C^TAC=D$.

合同矩阵：设 A，B 为 n 阶方阵， 若有可逆矩阵 C 使得 $C^{\mathrm{T}}AC=B$，则称 A **合同于** B.

注 合同是一种**等价关系**.

注意到 A 是实对称阵，记特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则由上一节的理论，存在正交矩阵 P，使得

$$P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

那么作正交变换 $x=Py$，可得

$$\begin{aligned} f&=x^TAx=(Qy)^TA(Qy)=y^T(Q^TAQ)y=y^T\Lambda y \\ &=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2. \end{aligned}$$

例 1 设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$，用正交变换化 f 为标准形,并求 f 的秩.

解 f 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

A 的特征多项式 $f(\lambda)=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)$,则特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$.

$\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量有

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

正交化后得两个正交的特征向量

$$p_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

$\lambda_3=10$ 的特征向量 $p_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$.

构造正交矩阵

$$P=\begin{pmatrix}0 & 4/3\sqrt{2} & 1/3\\ 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 2/3\\ 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & -2/3\end{pmatrix}.$$

由正交变换 $x=Py$,得标准形

$$f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2.$$

f 的秩为 2.

§5.6 配方法化二次型为标准形

两个例子即可.

例 1 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$.

解 $f=2(x_1+x_2-x_3)^2+3x_2^2-4x_2x_3+3x_3^2$

$$=2(x_1+x_2-x_3)^2+3(x_2-\frac{2}{3}x_3)^2+\frac{5}{3}x_3^2$$

令

$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2-x_3\\ y_2=x_2-(2/3)x_3\\ y_1=x_3\end{cases},$$

则

$$\begin{cases}x_1=y_1-y_2+(1/3)y_3\\ x_2=y_2+(2/3)y_3\\ x_3=y_3\end{cases}$$

即得可逆变换

$$x = Cy: \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

标准形为

$$f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2.$$

注 本例得到的标准形和上一节例 1 正交变换法得到的结果不同,说明标准形不唯一,而正交变换法是更具几何意义的方法.

例 2 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

解 先凑平方项

令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases},$$

即

$$x = C_1 y: \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} f &= 2y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3 - 6y_1y_3 + 6y_2y_3 \\ &= 2(y_1 - y_3)^2 - 2y_2^2 + 8y_2y_3 - 2y_3^2 \\ &= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2 \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases},$$

则

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_2 + 2z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}.$$

即

$$y = C_2 z：\quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是经可逆变换

$$x = C_1 y = C_1 C_2 z, \quad C = C_1 C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

得标准形为

$$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2.$$

§5.7 正定性

通过前面的例子可以看到, 用不同的方法得到的标准形可能不一样, 但是标准形中所含非 0 系数是确定的(即为秩), 并且正系数的个数也是确定的. 我们有

定理 1 设 $f = x^{\mathrm{T}} Ax$ 的秩为 r, 则在 f 的标准形中

(1) 系数不为 0 的平方项的个数一定是 r（因 $R(C^T AC) = R(A)$）;

(2) 正项个数 p 一定, 称为 f 的正惯性指数;（证明略去）

那么负项个数 $r-p$ 也一定, 称为 f 的负惯性指数.

正定二次型：$\forall \quad x \neq 0,\ f = x^{\mathrm{T}} Ax > 0$, 称 f 为正定二次型**(**椭圆型**)**, A 为正定矩阵.

负定二次型：$\forall \quad x \neq 0,\ f = x^{\mathrm{T}} Ax < 0$, 称 f 为负定二次型**(**双曲型**)**, A 为负定矩阵.

定理 5 $f = x^{\mathrm{T}} Ax$ 为正定二次型的充分必要条件是 f 的正惯性指数为 n.

推论 1 A 为正定矩阵的充分必要条件是 A 的特征值全为正数.

定理 6 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全为正数.

例 1 判断下列二次型的正定性:

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = -5x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$

解 (1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$$5>0,\ \begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1>0,\ |A|=1>0$$

故 A 为正定矩阵，f 为正定二次型.

(2) $$A=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

$$-5<0,\ \begin{vmatrix}-5 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=26>0,\ |A|=-80<0$$

故 A 为负定矩阵，f 为负定二次型.