

偏微分方程引论

翟健

2013 年 3 月

目录

第 1 章	波动方程	13
1.1	弦微振动方程的导出	13
1.2	一维波动方程的初值问题 (Cauchy 问题)	15
1.2.1	齐次方程的 Cauchy 问题	15
1.2.2	非齐次方程 Cauchy 问题	17
1.2.3	波动方程 Cauchy 问题的能量不等式	21
1.2.4	反射法求解半无界空间的初边值问题	26
1.3	二维与三维波动方程	27
1.3.1	三维球对称解	27
1.3.2	三维非球对称解	28
1.3.3	三维非齐次波动方程的解	30
1.3.4	降维法求解二维波动方程	32
1.4	分离变量法与初边值问题	35
1.4.1	分离变量法	35
第 2 章	热方程	41
2.1	Fourier 变换解 Cauchy 问题	42
2.1.1	Fourier 变换	42
2.1.2	Fourier 变换的性质	44
2.1.3	用 Fourier 变换解热传导方程 Cauchy 问题	48
2.2	分离变量法解初边值问题	51
2.2.1	齐次热传导方程的初边值问题	51

2.2.2	非齐次热传导方程的初边值问题	53
第 3 章	位势方程	55
3.1	基本解	55
3.2	Green 函数	58
3.3	Laplace 方程与调和函数	62
第 4 章	一阶偏微分方程组与二阶线性偏微分方程分类	65
4.1	二阶偏微分方程的分类	65
4.2	特征流形与 Cauchy 问题局部唯一可解性 (在实解析函数类中)	68
第 5 章	Sobolev 空间与广义函数	73
5.1	Sobolev 空间	73
5.2	广义函数	77
5.2.1	广义函数及其性质	77
5.2.2	广义函数的应用	83
5.3	弱解	86
第 6 章	二阶线性椭圆型方程	87
6.1	极值原理	87
6.1.1	极值原理	87
6.1.2	应用极值原理估计解的上、下界	91
6.2	变分方法	92
6.2.1	变分方法	92
6.2.2	变分方法的应用	95
6.3	解的存在性与唯一性	97
6.4	Sturm-Liouville 问题	97
第 7 章	二阶线性抛物型方程	109
7.1	极值原理	109
7.1.1	极值原理	109
7.1.2	第一初边值问题解的上、下界估计	111

目录	5
7.1.3 第二、第三初边值问题解的上、下界估计	111
7.1.4 Cauchy 问题解的上、下界估计	114
7.2 能量不等式	114
7.3 解的存在性与唯一性	116
第 8 章 二阶线性双曲型方程	117
8.0.1 能量不等式 2	117
8.1 解的存在性与唯一性	119

偏微分方程 (方程组) 是指未知函数和未知函数的偏导数满足的一个 (一组) 关系式. 人类社会工业化时代的到来, 近代物理学 (特别是相对论和量子力学以及材料科学) 的创立, 二次大战期间及其后流体力学以及空间飞行器的研究进展等极大地丰富了偏微分方程的应用领域, 推动了现代偏微分方程理论的发展. 迄今为止, 包含一阶和 (或) 二阶偏导数的偏微分方程 (组) 中研究得最多最完善的有三类: 双曲方程 (组)、椭圆方程 (组) 和抛物方程 (组). 它们的典型代表分别是波动方程、位势方程和热方程. 即未知函数 u 分别满足

$$\partial_{tt}u - \Delta_x u = f, \quad (0.1)$$

$$\Delta_x u = f, \quad (0.2)$$

$$\partial_t u - \Delta_x u = f. \quad (0.3)$$

根据不同的情况, 我们再给未知函数附加初始条件和 (或) 边界条件. 最典型的条件有三类.

一、初始条件 $-\varphi(x)$ 和 (或) $\psi(x)$ 为已知. 见图 1.

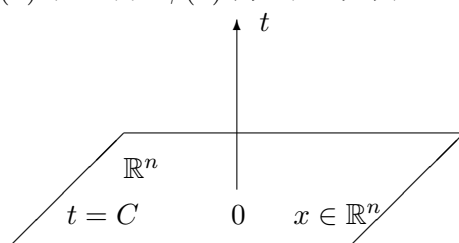


图 1. 初始条件

例如波动方程的 Cauchy 问题如下.

$$\begin{cases} \partial_{tt}u(x, t) - \Delta_x u(x, t) = f(x, t), & \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (0.4)$$

热方程的 Cauchy 问题如下.

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta_x u(x, t) = f(x, t), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (0.5)$$

二、初边值条件 $-\varphi(x)$ 和 (或) $\psi(x), h(x, t), \alpha, \beta$ ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$) 为已知. 见图 2.

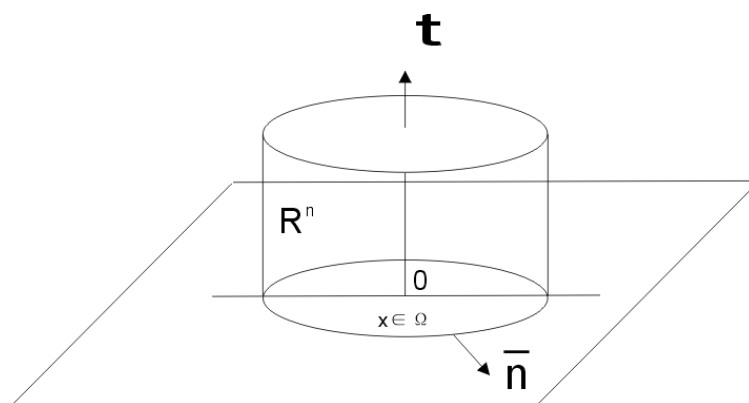


图 2. 初边值条件

例如波动方程的初边值问题

$$\begin{cases} \partial_{tt} u(x, t) - \Delta_x u(x, t) = f(x, t), \quad \forall x \in \Omega, \forall t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \forall x \in \Omega, \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), \quad \forall x \in \Omega, \\ \alpha u(x, t) + \beta \frac{\partial u(x, t)}{\partial \bar{n}} = h(x, t), \quad \forall x \in \partial\Omega, \forall t > 0. \end{cases} \quad (0.6)$$

热方程的初边值问题

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta_x u(x, t) = f(x, t), \quad \forall x \in \Omega, \forall t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \forall x \in \Omega, \\ \alpha u(x, t) + \beta \frac{\partial u(x, t)}{\partial \bar{n}} = h(x, t), \quad \forall x \in \partial\Omega, \forall t > 0. \end{cases} \quad (0.7)$$

其中 $\frac{\partial}{\partial \bar{n}}$ 是沿区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上单位外法方向的偏导数.

三、边值条件 $-h(x), \alpha, \beta$ 为已知. 见图 3.

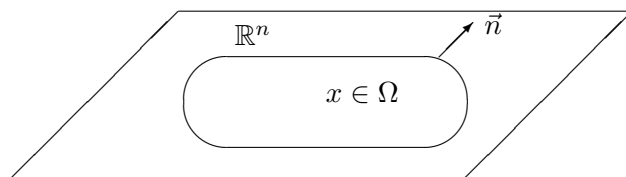


图 3. 边值条件

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & \forall x \in \Omega, \\ \alpha u(x) + \beta \frac{\partial u(x)}{\partial \vec{n}} = h(x), & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (0.8)$$

特别当 $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ 时, 称 (0.8) 为位势方程的 Dirichlet 问题. 当 $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ 时, 称 (0.8) 为位势方程的 Neumann 问题.

例 0.1. Maxwell 方程. 电场 $E(x, t)$ 与磁场 $H(x, t)$,

$$\partial_t E = \text{curl} H, \quad \partial_t H = -\text{curl} E, \quad \text{div} E = \text{div} H = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \forall t > 0. \quad (0.9)$$

例 0.2. Schrödinger 方程. 质量为 m 的单个粒子的波函数 $u(x, t)$ 在势函数为 $V(x, t)$ 的场中

$$i\hbar \partial_t u + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + V u = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \forall t > 0, \quad (0.10)$$

其中 $h = 2\pi\hbar$ 为 Planck 常数.

例 0.3. Navier-Stokes 方程. 流体的速度 $u(x, t)$ 与压力 $p(x, t)$

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u - (u \cdot \nabla) u - \nabla p, & \forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \forall t > 0. \\ \text{div} u = 0, & \forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \forall t > 0. \end{cases} \quad (0.11)$$

例 0.4. Black-Scholes 期权理论. 设资产 S 满足几何 Brownian 运动

$$dS = \mu(t)Sdt + \sigma(t)SdW$$

其中, $\mu(t)$ 为漂移系数 (S 随时间 t 的瞬时变化率), $\sigma(t)$ 为瞬时标准方差 (描述不确定因素对 S 的可能影响). 由无套利条件和 Ito 公式可以导出 t 时刻 S 可能的期权价值 $F(S, t)$ 满足方程

$$\partial_t F + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_{SS} F + rS \partial_S F - rF = 0.$$

例 0.5. 平均曲率曲面方程. 三维欧氏空间中光滑曲面的共形表示 $x : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x(u, v) \in \mathbb{R}^3$ 是指以下共形条件处处满足

$$x_u \cdot x_v = 0, \quad |x_u| = |x_v|.$$

此时, 曲面 x 处的平均曲率 $H(x)$ 满足方程

$$\Delta_{u,v} x = 2H(x)x_u \times x_v.$$

常用记号与定义

Ω : \mathbb{R}^n 中的有界开集;

$C^m(\Omega)$ (其中 $m \in \mathbb{N}$): 在区域 Ω 内连续且一直到 m 次的偏导数都连续的函数集合;

$C_0^m(\Omega)$ (其中 $m \in \mathbb{N}$): $C^m(\Omega)$ 中有紧支集的函数集合;

$C^m(\bar{\Omega})$ (其中 $m \in \mathbb{N}$): 在区域 $\bar{\Omega}$ 上连续且一直到 m 次的偏导数都连续

的函数集合;

$L^p([0, T]; L^q(\Omega))$ (其中 $p \geq 1, q \geq 1$): 满足 $(\int_0^T (\int_\Omega |u(x, t)|^q dx)^{p/q} dt)^{1/p} < \infty$ 的函数 u 的全体组成的集合, 可以证明按此赋范数的集合是 Banach 空间;

$C([0, T]; L^q(\Omega))$ (其中 $q \geq 1$): 满足 $\sup_{0 \leq t \leq T} (\int_\Omega |u(x, t)|^q dx)^{1/q} < \infty$ 的函数 u 的全体组成的集合, 可以证明按此赋范数的集合是 Banach 空间;

$W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$: Sobolev 空间; 当 $p = 2$ 时, 记

$$H^m(\mathbb{R}^n) := W^{m,2}(\mathbb{R}^n).$$

$$Q_T := \Omega \times (0, T], S_T := \partial\Omega \times [0, T], \Gamma_T := S_T \cup (\Omega \times \{0\}).$$

习题: [7] 2(pp.85); 16(pp.88).

第 1 章

波动方程

1.1 弦微振动方程的导出

设弦为柔软 (不抗弯, 因此不考虑弯曲应力) 的细线 (一维空间), $\rho > 0$ 为弦的线密度 (即单位长度上弦的质量). 易知, 时刻 t 弦的动能为

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho (\partial_t u(x, t))^2 dx.$$

又根据 **Hook 定律** (拉伸后所具有的应力与应变成正比), 参见 [3]p.372(3.9), 单位长度上弦的纵向位移 (应变) 为 $\frac{\partial u}{\partial x}$, 应力为 $\frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial x}$, 单位长度弹性能为 $\frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$, 其中 $\tau > 0$ 是弹性系数. 因此形变产生的弹性势能为

$$U_1(t) = \frac{\tau}{2} \int_0^l \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}(x, t) \right]^2 dx.$$

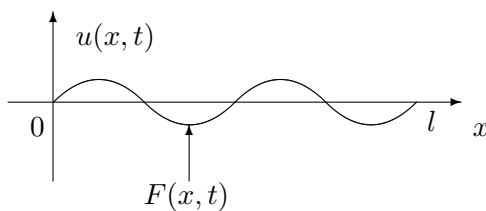


图 4. Hook 定律

另一方面, 设在弦 x 处时刻 t 单位长度上受到的外力为 $F(x, t)$, 方向与 u 相同, 则其位能为

$$U_2(t) = \int_0^l F(x, t)u(x, t)dx.$$

当 $Fu > 0$ 时, U_2 与 U_1 的效果相反 (使弦伸长);

当 $Fu < 0$ 时, U_2 与 U_1 的效果相同 (使弦缩短).

用 Hamilton 变分原理可以导出运动方程. 将从初始时刻到 t_0 时刻所有动能与势能的差作为可能运动的泛函

$$J(u) = \int_0^{t_0} dt \int_0^l \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 + F(x, t)u(x, t) \right] dx.$$

Hamilton 原理 (具体可参考文献 [6](I, pp.188)) 在所有的可能运动状态中, 真实的运动 u 使泛函 J 的一阶变分为零. 即

$$\delta J(u) = 0.$$

$\forall \epsilon \in [-1, 1], \forall \eta(x, t) \in C_0^1([0, l] \times [0, t_0]), v_\epsilon(x, t) := u(x, t) + \epsilon \eta(x, t)$ 是可能的运动状态: 在初始时刻 ($t = 0$), 终止时刻 ($t = t_0$), 边界 ($x = 0, x = l$) 处与真实运动一致. 由 Hamilton 原理, 有

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} J(v_\epsilon) = 0.$$

所以我们有

$$\begin{aligned}
 0 &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} J(u + \epsilon\eta) \\
 &= \int_0^{t_0} dt \int_0^l \left[\rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \tau \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + F\eta \right] dx \\
 &= \left[\int_0^l \rho \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \eta(x,t) dx \right]_{t=0}^{t_0} - \left[\int_0^{t_0} \tau \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \eta(x,t) dt \right]_{x=0}^l \\
 &\quad - \int_0^{t_0} dt \int_0^l \left[\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - F(x,t) \right] \eta(x,t) dx.
 \end{aligned}$$

由 η 的任意性知, 真实运动 $u(x,t)$ 必须是下述弦振动方程 (即一维波动方程) 初边值问题的解:

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \frac{\tau}{\rho} \partial_{xx}u = \frac{F(x,t)}{\rho}, & 0 < \forall x < l, \forall t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \partial_t u(x,0) = \psi(x), & 0 < \forall x < l. \end{cases}$$

与此相关, n 维 ($n \geq 2$) 波动方程为

$$\partial_{tt}u = a^2 \Delta_x u + f, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0$$

其中 $\Delta_x u := \partial_{x_1 x_1} u + \partial_{x_2 x_2} u + \cdots + \partial_{x_n x_n} u$ 为 Laplace 算子. 当 $f \equiv 0$ 时, 该方程为齐次方程; 当 $f \neq 0$ 时, 则为非齐次方程.

1.2 一维波动方程的初值问题 (Cauchy 问题)

1.2.1 齐次方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \square_a u \equiv \partial_{tt}u(x,t) - a^2 \partial_{xx}u(x,t) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u(x,0) = \psi(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 \square_a 称为 D'Alembert 算子。作如下变换

$$\begin{cases} \xi = x - at, \\ \eta = x + at, \end{cases}$$

把它代入 (2.1) 的第一式, 于是有

$$-4a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

由此可以解得

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta).$$

其中 $F(\xi)$ 和 $G(\eta)$ 是两个任意函数. 再把 ξ 和 η 以 x 和 t 代入, 则有

$$u(x, t) = F(x - at) + G(x + at).$$

根据初始条件, 当 $t = 0$ 时, 有

$$\begin{cases} \varphi(x) = F(x) + G(x), \\ \psi(x) = -aF'(x) + aG'(x). \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \varphi(x) = F(x) + G(x), \\ \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(y) dy = -F(x) + G(x) + F(x_0) - G(x_0). \end{cases}$$

由此可以确定函数 F 和 G 分别为

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(y) dy - \frac{[G(x_0) - F(x_0)]}{2}, \\ G(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(y) dy + \frac{[G(x_0) - F(x_0)]}{2}. \end{cases}$$

于是我们得到齐次方程 Cauchy 问题 (2.1) 解的 D'Alembert 公式,

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy. \quad (2.2)$$

1.2.2 非齐次方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \square_a u \equiv \partial_{tt}u - a^2 \partial_{xx}u = f(x, t), & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.3)$$

根据线性方程解的叠加原理, 若 u_1, u_2 分别为

$$\begin{cases} \square_a u = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.4)$$

与

$$\begin{cases} \square_a u = f, & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u(x, 0) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.5)$$

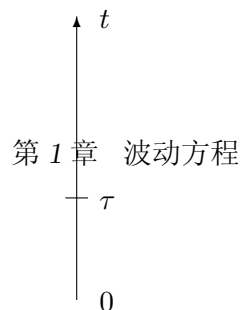
的解, 则 $u_1 + u_2$ 为 (2.3) 的解. (2.4) 是齐次方程的 Cauchy 问题, 可以用 D'Alembert 公式求解. 因此只要解 (2.5) 即可. 为此, 我们先介绍 Duhamel 齐次化原理.

定理 2.1. (Duhamel 齐次化原理) 见图 5. 对任意给定的 $\tau > 0$, 设 $\omega = \omega(x, t, \tau)$ 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \partial_{tt}\omega - a^2 \partial_{xx}\omega = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > \tau, \\ \omega(x, t, \tau)|_{t=\tau} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t \omega(x, t, \tau)|_{t=\tau} = f(x, \tau), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.6)$$

的光滑解, 则

$$u(x, t) := \int_0^t \omega(x, t, \tau) d\tau$$



为 (2.5) 的解.

证明: 因为

图 5. Duhamel 齐次化原理

$$\begin{aligned}\partial_t u(x, t) &= \omega(x, t, t) + \int_0^t \partial_t \omega(x, t, \tau) d\tau = \int_0^t \partial_t \omega(x, t, \tau) d\tau \\ \partial_{tt} u(x, t) &= \partial_t \omega(x, t, t) + \int_0^t \partial_{tt} \omega(x, t, \tau) d\tau \\ &= f(x, t) + a^2 \partial_{xx} u(x, t). \\ u(x, 0) &= 0, \\ \partial_t u(x, 0) &= 0,\end{aligned}$$

其中运算需要 ω 的光滑性。所以, $u(x, t)$ 为 (2.5) 的解. Q.E.D

在 Cauchy 问题 (2.6) 中, 作时间变换, 用 $t - \tau$ 代替 t . 由 D'Alembert 公式

$$\omega(x, t, \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy.$$

由齐次化原理

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy.$$

所以 (2.3) 的形式解为

$$\begin{aligned}u(x, t) &= u_1(x, t) + u_2(x, t) \\ &= \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy \quad (2.7) \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy.\end{aligned}$$

利用求导与积分可交换定理, 可以证明下述定理.

定理 2.2. 若 $\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R}), f \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, 则由 (2.7) 给

出的 $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, 且为 (2.3) 的解. 进一步, 若 φ, ψ, f 为 x 的偶 (奇, 周期) 函数, 则 u 为 x 的偶 (奇, 周期) 函数.

证明: 参考 [7]pp.68 Theorem 1.Q.E.D

由 D'Alembert 公式 (2.2), 我们可以进一步研究一维波的传播特性.

附注 1. 波沿特征线以速度 a 传播.

注意到 $\square_a u = (\partial_t + a\partial_x)(\partial_t - a\partial_x)u$, 若令 $v = (\partial_t - a\partial_x)u$, 则方程 $\square_a u = 0$ 等价于

$$\begin{cases} (\partial_t - a\partial_x)u = v, \\ (\partial_t + a\partial_x)v = 0. \end{cases}$$

用沿特征线 $x = c \pm at$ 的全导数表示为 (见图 6 和图 7)

$$\frac{dv(c + at, t)}{dt} = 0, \quad \frac{du(c - at, t)}{dt} = v(c - at, t).$$

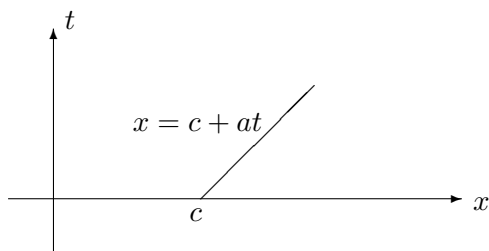


图 6. 特征线

另一方面, 我们已经知道 $u(x, t) = F(x - at) + G(x + at)$. 由图可以看出 $G(x + at)$ 为左行波, $F(x - at)$ 为右行波。

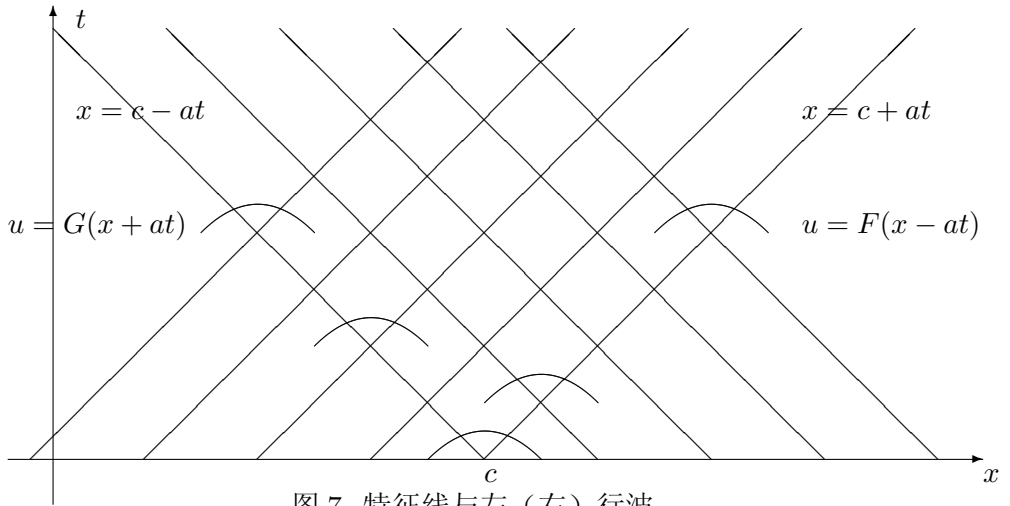
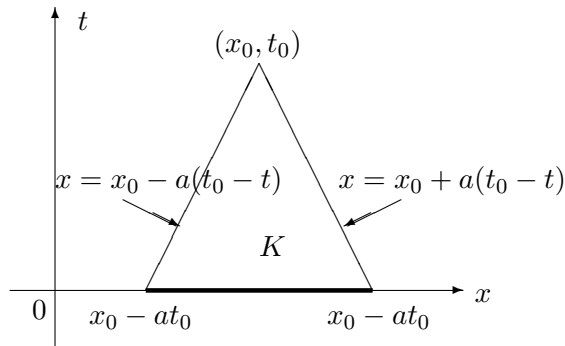
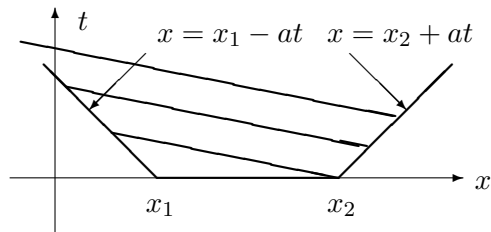
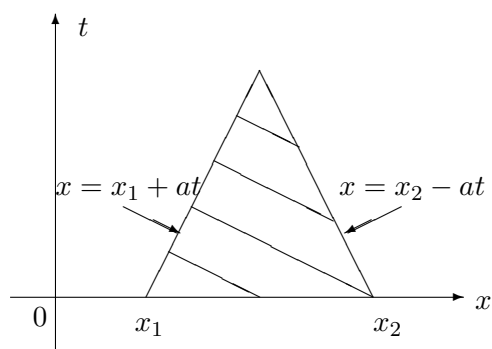


图 7. 特征线与左(右)行波

图 8. 解在 (x_0, t_0) 处取值所依赖的初值区间图 9. $[x_1, x_2]$ 中初值能够影响解的区域

图 10. $[x_1, x_2]$ 中初值能够决定解的区域

附注 2. 依赖区间, 影响区域与决定区域 (见图 8- 图 10).

附注 3. 设 $\varphi \equiv f \equiv 0$, 由 D'Alembert 公式 (2.2), 有

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy.$$

若 $\psi'(x)$ 在 $x = c$ 处不连续, 则

$$u_{tt}(x, t) = \frac{a}{2} [\psi'(x + at) - \psi'(x - at)]$$

在 $x \pm at = c$ 的两侧不连续. 即初值的奇性沿特征线传播.

1.2.3 波动方程 Cauchy 问题的能量不等式

能量不等式 设 $u \in C^1(\bar{Q}) \cap C^2(Q)$, $Q_{t_0} := \mathbb{R} \times (0, t_0]$ 为 (2.3) 的解, 则 $\forall \tau \in (0, t_0]$, 有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\tau} [u_t^2(x, \tau) + a^2 u_x^2(x, \tau)] dx \\ & \leq e^{t_0} \left\{ \int_{\Omega_0} [\psi^2(x) + a^2 \varphi_x^2(x)] dx + \int \int_{K_\tau} f^2(x, t) dx dt \right\}, \quad (2.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int \int_{K_\tau} [u_t^2(x, t) + a^2 u_x^2(x, t)] dx dt \\ & \leq e^{t_0} \left\{ \int_{\Omega_0} [\psi^2(x) + a^2 \varphi_x^2(x)] dx + \int \int_{K_\tau} f^2(x, t) dx dt \right\}. \quad (2.9) \end{aligned}$$

其中 $\Omega_\tau = K \cap \{t = \tau\}$, $\Omega_0 = K \cap \{t = 0\}$, $K_\tau = K \cap \{0 \leq t \leq \tau\}$, K 为特征锥. 见图 11.

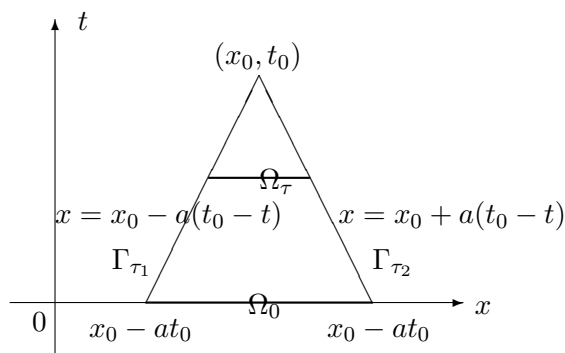


图 11. 特征锥 K

由方程 (2.3) $\times \partial_t u$ 可得

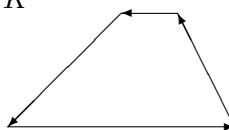


图 12. Green 公式中边的积分方向

$$\int \int_{K_\tau} \partial_t u (\partial_t^2 u - a^2 \partial_x^2 u) dx dt = \int \int_{K_\tau} \partial_t u f dx dt.$$

根据 Green 公式, 见图 12, 有

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \int \int_{K_\tau} \left\{ \frac{1}{2} \partial_t [(\partial_t u)^2 + a^2 (\partial_x u)^2] - a^2 \partial_x (\partial_t u \partial_x u) \right\} dx dt \\ &= (-1) \int \int_{K_\tau} \left\{ \partial_x [a^2 \partial_t u \partial_x u] - \partial_t \left(\frac{1}{2} [(\partial_t u)^2 + a^2 (\partial_x u)^2] \right) \right\} dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\overrightarrow{\Omega_\tau}} [(\partial_t u)^2 + a^2 (\partial_x u)^2] dx - \frac{1}{2} \int_{\overleftarrow{\Omega_0}} (\psi^2 + a^2 \varphi_x^2) dx \\ &\quad + \int_{\overleftarrow{\Gamma_{\tau_1}} \cup \overleftarrow{\Gamma_{\tau_2}}} \left\{ a^2 (\partial_t u \partial_x u) dt + \frac{1}{2} [(\partial_t u)^2 + a^2 (\partial_x u)^2] dx \right\} \\ &= J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

其中, $\overrightarrow{\Omega_0}$ 表示顺时针方向积分, $\overleftarrow{\Omega_0}$ 表示逆时针积分. 在逆时针方向 $\overleftarrow{\Gamma_{\tau_1}}$ 上有 $dx = a dt$ 且 $dt > 0$, 在逆时针方向 $\overleftarrow{\Gamma_{\tau_2}}$ 上有 $dx = -a dt$ 且 $dt < 0$. 所以

$$\begin{aligned}
J_3 &= (-1) \int_{\overleftarrow{\Gamma}_{\tau_1} \cup \overleftarrow{\Gamma}_{\tau_2}} \left\{ a^2(\partial_t u \partial_x u) dt + \frac{1}{2} [(\partial_t u)^2 + a^2(\partial_x u)^2] dx \right\} \\
&= \int_{\overrightarrow{\Gamma}_{\tau_1}} \left\{ a^2(\partial_t u \partial_x u) + \frac{a}{2} [(\partial_t u)^2 + a^2(\partial_x u)^2] \right\} dt \\
&\quad - \int_{\overleftarrow{\Gamma}_{\tau_2}} \left\{ a^2(\partial_t u \partial_x u) - \frac{a}{2} [(\partial_t u)^2 + a^2(\partial_x u)^2] \right\} dt \\
&= \frac{a}{2} \int_{\overrightarrow{\Gamma}_{\tau_1}} (\partial_t u + a\partial_x u)^2 dt - \frac{a}{2} \int_{\overleftarrow{\Gamma}_{\tau_2}} (\partial_t u - a\partial_x u)^2 dt \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
&\int_{\overrightarrow{\Omega}_\tau} [(\partial_t u)^2 + a^2(\partial_x u)^2] dx \\
&\leq \int_{\overleftarrow{\Omega}_0} (\psi^2 + a^2\varphi_x^2) dx + 2 \int \int_{K_\tau} \partial_t u f dx dt \\
&\leq \int_{\overleftarrow{\Omega}_0} (\psi^2 + a^2\varphi_x^2) dx + \int \int_{K_\tau} (\partial_t u)^2 dx dt + \int \int_{K_\tau} f^2 dx dt.
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
G(\tau) &:= \int \int_{K_\tau} [(\partial_t u)^2 + a^2(\partial_x u)^2] dx dt \\
&= \int_0^\tau dt \int_{x_1+at}^{x_2-at} [(\partial_t u)^2 + a^2(\partial_x u)^2] dx,
\end{aligned}$$

则

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leq G(\tau) + F(\tau),$$

其中

$$F(\tau) = \int_{\overleftarrow{\Omega}_0} (\psi^2 + a^2\varphi_x^2) dx + \int \int_{K_\tau} f^2 dx dt.$$

引理 2.4. (Gronwall 不等式) 若存在常数 C 使得

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leq CG(\tau) + F(\tau), \quad \forall \tau \in (0, T),$$

则

$$G(\tau) \leq e^{C\tau}G(0) + e^{C\tau} \int_0^\tau e^{-Ct}F(t)dt, \quad \forall \tau \in (0, T).$$

证明: 令

$$\frac{dG}{d\tau} = CG(\tau) + F(\tau) - E(\tau),$$

其中 $E(\tau) \geq 0$. 则有

$$\frac{d}{d\tau}[G(\tau)e^{-C\tau}] = e^{-C\tau}[F(\tau) - E(\tau)],$$

所以

$$\begin{aligned} G(\tau)e^{-C\tau} - G(0) &= \int_0^\tau e^{-Ct}[F(t) - E(t)]dt \\ &\leq \int_0^\tau e^{-Ct}F(t)dt. \quad \text{Q.E.D} \end{aligned}$$

应用 Gronwall 不等式于前述由 Cauchy 问题 (2.3) 导出的微分不等式, 因为 $G(0) = 0$, $F(t)$ 为 t 的增函数, 所以

$$\begin{aligned} G(\tau) &\leq e^\tau F(\tau)(1 - e^{-\tau}) = (e^\tau - 1)F(\tau), \\ \frac{dG(\tau)}{d\tau} &\leq (e^\tau - 1)F(\tau) + F(\tau) = e^\tau F(\tau). \end{aligned}$$

由此, 我们证明了能量不等式 (2.8) 和 (2.9) 成立. 注意到能量不等式 (2.8) 和 (2.9) 给出了未知函数 u 的一阶偏导数的先验估计. 进一步, 我们还可以有关于 u 的先验估计. 注意到 $\Omega_\tau \subset \Omega_0$, ($\forall \tau \in [0, t_0]$), 则有

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\tau} u^2(x, \tau) dx - \int_{\Omega_0} u^2(x, 0) dx \\
& \leq \int_{\Omega_\tau} u^2(x, \tau) - u^2(x, 0) dx \\
& = \int_{\Omega_\tau} \int_0^\tau \partial_t u^2(x, t) dt dx \\
& \leq \int_{\Omega_\tau} \int_0^\tau (u(x, t))^2 + (\partial_t u(x, t))^2 dx dt \\
& \leq \int \int_{K_\tau} u^2(x, t) dx dt + \int \int_{K_\tau} (\partial_t u(x, t))^2 dx dt.
\end{aligned}$$

令

$$G(\tau) = \int \int_{K_\tau} u^2(x, t) dx dt,$$

则

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} = \int_{\Omega_\tau} u^2(x, \tau) dx,$$

并且

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leq G(\tau) + \int_{\Omega_0} \varphi^2(x) dx + \int \int_{K_\tau} (\partial_t u(x, t))^2 dx dt. \quad (1.1)$$

由 Gronwall 不等式和 (2.9), 可得

$$\begin{aligned}
& \int \int_{K_\tau} u^2(x, t) dx dt \\
& \leq e^{t_0} \left\{ \int_{\Omega_0} \varphi^2(x) dx + \int \int_{K_\tau} (\partial_t u(x, t))^2 dx dt \right\} \\
& \leq e^{2t_0} \left\{ \int_{\Omega_0} [\varphi^2 + \psi^2 + a^2 \varphi_x^2] dx + \int \int_{K_\tau} f^2(x, t) dx dt \right\}. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

代入 (1.1), 因此, 我们得到关于未知函数 u 的先验估计

$$\int_{\Omega_\tau} u^2(x, \tau) dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq e^{t_0} \left\{ \int_{\Omega_0} \varphi^2(x) dx + \int \int_{K_\tau} (\partial_t u(x, t))^2 dx dt \right\} \\
&\leq e^{2t_0} \left\{ \int_{\Omega_0} [\varphi^2 + \psi^2 + a^2 \varphi_x^2] dx + \int \int_{K_\tau} f^2(x, t) dx dt \right\}. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

1.2.4 反射法求解半无界空间的初边值问题

一端固定（在固定端 $x = 0$ 处，弦可自由旋转，但不能上下位移，因此 $u(0, t) \equiv 0$ ）的半无限长的弦自由振动（因此外力 $f \equiv 0$ ）可归结为

$$\begin{cases} \partial_{tt} u(x, t) - a^2 \partial_{xx} u(x, t) = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x > 0, \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & x > 0, \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

关于 x 作如下奇延拓,

$$U(x, t) := \begin{cases} u(x, t), & x \geq 0, \\ -u(-x, t), & x < 0, \end{cases}$$

$$\Phi(x) := \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$\Psi(x) := \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases} \partial_{tt} U(x, t) - a^2 \partial_{xx} U(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ U(x, 0) = \Phi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t U(x, 0) = \Psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

所以

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] \\ + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy, & x-at \geq 0, \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at) - \varphi(at-x)] \\ + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(y) dy, & x-at < 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

此外, 一端自由 (在自由端 $x=0$ 处, 弦可上下位移但不能自由旋转, 因此 $\partial_x u(0, t) \equiv 0$) 的半无限弦的自由振动可归结为

$$\begin{cases} \partial_{tt} u(x, t) - a^2 \partial_{xx} u(x, t) = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x > 0, \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & x > 0, \\ \partial_x u(0, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

关于 x 作偶延拓, 类似地, 可以归纳为 Cauchy 问题并可得到解表达式.

1.3 二维与三维波动方程

波在空间的传播可归结为三维波动方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \partial_{tt} u(x, y, z, t) = a^2 \Delta u(x, y, z, t), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t u(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (3.1)$$

1.3.1 三维球对称解

在球坐标系 (r, θ, ζ) 中, 令

$$\begin{aligned} x &= r \sin \zeta \cos \theta, \\ y &= r \sin \zeta \sin \theta, \\ z &= r \cos \zeta. \end{aligned}$$

若 $\varphi = \varphi(r), \psi = \psi(r)$ 仅是 r 的函数, 则称 φ, ψ 是球对称函数. 此时 (3.1) 的解 $u = u(r)$ 也将是球对称的. 可以证明在球坐标系下,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{(\theta, \zeta)} u.$$

其中 $\Delta_{(\theta, \zeta)}$ 是仅与 θ, ζ 有关的偏导算子. 因此球对称 Cauchy 问题 (3.1) 可以归结为下述关于新的未知函数 $v(r, t) := ru(r, t)$ 的半无界空间上的初边值问题

$$\begin{cases} \partial_{tt} v - a^2 \partial_{rr} v = 0, & r > 0, t > 0, \\ v(r, 0) = r\varphi(r), & r > 0, \\ \partial_t v(r, 0) = r\psi(r), & r > 0, \\ v = 0, & t = 0, \\ & t > 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

于是由 (2.13) 有

$$u(r, t) = \begin{cases} \frac{1}{2r} [(r+at)\varphi(r+at) + (r-at)\varphi(r-at)] \\ + \frac{1}{2ar} \int_{r-at}^{r+at} \rho\psi(\rho) d\rho, & r-at > 0, \\ \frac{1}{2r} [(r+at)\varphi(r+at) - (at-r)\varphi(at-r)] \\ + \frac{1}{2ar} \int_{at-r}^{r+at} \rho\psi(\rho) d\rho, & r-at \leq 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

1.3.2 三维非球对称解

以 $M = (x, y, z)$ 为球心, r 为半径的球体记为 $B_r^{(M)}$, 而球面记为 $S_r^{(M)}$. u 的球面平均值

$$\begin{aligned} & \bar{u}(M, r, t) \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int \int_{S_r^{(M)}} u(X, Y, Z, t) dS(X, Y, Z) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \int_{S_1^{(M)}} u(x+r\sin\zeta\cos\theta, y+r\sin\zeta\sin\theta, z+r\cos\zeta) d\omega(\zeta, \theta), \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中 dS 为球面 $S_r^{(M)}$ 的面积元, $d\omega$ 为单位球面 $S_1^{(M)}$ 的面积元. 则当 u 连续时, 有

$$\lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}(M, r, t) = u(M, t). \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} &= \frac{1}{4\pi} \int \int_{S_1^{(M)}} \frac{\partial u}{\partial r} d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int \int_{S_r^{(M)}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS \quad (\vec{n} \text{ 为球面上单位外法方向向量}) \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int \int \int_{B_r^{(M)}} \Delta u dV \quad (\text{由 Gauss 公式}) \\ &= \frac{1}{4\pi a^2 r^2} \int \int \int_{B_r^{(M)}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dV \quad (\text{由方程 (3.1)}) \\ &= \frac{1}{4\pi a^2 r^2} \int_0^r d\rho \int \int_{S_\rho^{(M)}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dS, \end{aligned}$$

两边同乘 r^2 , 然后关于 r 再求导, 有

$$\frac{\partial}{\partial r} [r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}] = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \int_{S_r^{(M)}} u dS = \frac{r^2}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}.$$

由此可知, 若 u 满足 (3.1) 则 $v(r, t) := r\bar{u}(M, r, t)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} \partial_{tt}v - a^2 \partial_{rr}v = 0, & \forall r > 0, \forall t > 0 \\ v(r, 0) = r\bar{\varphi}(r), \partial_t v(r, 0) = r\bar{\psi}(r), & \forall r > 0, \\ v(0, t) = 0, & \forall t > 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(r) &:= \frac{1}{4\pi r^2} \int \int_{S_r^{(M)}} \varphi(X, Y, Z) dS, \\ \bar{\psi}(r) &:= \frac{1}{4\pi r^2} \int \int_{S_r^{(M)}} \psi(X, Y, Z) dS. \end{aligned}$$

分别是初值的球平均函数。由 (3.3) – (3.5) 可得, 对任意 $t > 0$

$$\begin{aligned}
 u(M, t) &= \lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}(r, t) \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} [(r + at)\bar{\varphi}(r + at) - (at - r)\bar{\varphi}(at - r)] \\
 &\quad + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2ar} \int_{at-r}^{at+r} \rho \bar{\psi}(\rho) d\rho \\
 &= \frac{1}{2} [\bar{\varphi}(at) + \bar{\varphi}(at) + (at)\bar{\varphi}'(at) + (at)\bar{\varphi}'(at)] \\
 &\quad + \frac{1}{2a} [(at)\bar{\psi}(at) + (at)\bar{\psi}(at)] \\
 &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} [at\bar{\varphi}(at)] + \frac{1}{a} [at\bar{\psi}(at)].
 \end{aligned}$$

其中, 由于对于充分小 r 有 $r - at < 0$, 故仅用到 (3.3) 中 $r - at < 0$ 部分。所以, 我们有 Cauchy 问题 (3.1) 的解表达式,

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int \int_{S_{at}^{(M)}} \varphi(X, Y, Z) dS \right) \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int \int_{S_{at}^{(M)}} \psi(X, Y, Z) dS. \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

1.3.3 三维非齐次波动方程的解

考虑下述具有非齐次项 f 的 Cauchy 问题.

$$\begin{cases} \partial_{tt} u(x, y, z, t) = a^2 \Delta_{(x,y,z)} u(x, y, z, t) + f(x, y, z, t), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = 0, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t u(x, y, z, 0) = 0, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (3.8)$$

我们将采用齐次化原理, 首先令

$$u(x, y, z, t) = \int_0^t \omega(x, y, z, t, \tau) d\tau, \quad (3.9)$$

其中 $\omega(x, y, z, t, \tau)$ 是下述定解问题的解,

$$\begin{cases} \partial_{tt}\omega(x, y, z, t, \tau) = a^2\Delta_{(x,y,z)}\omega(x, y, z, t, \tau), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > \tau, \\ \omega(x, y, z, t, \tau)|_{t=\tau} = 0, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t\omega(x, y, z, t, \tau)|_{t=\tau} = f(x, y, z, \tau), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (3.10)$$

由 (3.7) 知,

$$\omega(x, y, z, t, \tau) = \frac{1}{4\pi a} \int \int_{S_{a(t-\tau)}^{(M)}} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{a(t-\tau)} dS,$$

所以,

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a} \int_0^t d\tau \int \int_{S_{a(t-\tau)}^{(M)}} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{a(t-\tau)} dS. \quad (3.11)$$

进一步, 用线性迭加原理, 可以求解下述定解问题

$$\begin{cases} \partial_{tt}u(x, y, z, t) = a^2\Delta_{(x,y,z)}u(x, y, z, t) + f(x, y, z, t), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_tu(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (3.12)$$

(3.12) 的解表达式 (Kirchhoff 公式)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \int \int_{S_{at}(x)} \varphi(y) dS \right] \\ &+ \left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \int \int_{S_{at}(x)} \psi(y) dS \right] \\ &+ \int_0^t \left[\frac{1}{4\pi a^2 (t-\tau)} \int \int_{S_{a(t-\tau)}(x)} f(y, \tau) dS \right] d\tau. \end{aligned}$$

1.3.4 降维法求解二维波动方程

考虑下述二维波动方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - a^2(\partial_{x_1x_1}u + \partial_{x_2x_2}u) = f(x_1, x_2, t), & (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (3.13)$$

令

$$\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t) = u(x, t) = u(x_1, x_2, t),$$

则有

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \int \int_{S_{at}^{(x)}} \varphi(y) dS(y) \right] + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int \int_{S_{at}^{(x)}} \psi(y) dS(y) \\ &+ \int_0^t \left[\frac{1}{4\pi a^2 (t-\tau)} \int \int_{S_{a(t-\tau)}^{(x)}} f(y, \tau) dS(y) \right] d\tau. \end{aligned}$$

因为在球面 $S_{at}^{(x)}$ 上有积分元

$$\begin{aligned} dS(y) &= (at)^2 \sin \zeta d\theta d\zeta = \frac{1}{\cos \zeta} d\bar{y}_1 d\bar{y}_2, \\ \bar{y}_1 &= at \sin \zeta \cos \theta, \\ \bar{y}_2 &= at \sin \zeta \sin \theta, \\ \bar{y}_3 &= at \cos \zeta. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} d\bar{y}_1 d\bar{y}_2 &= \begin{vmatrix} \cos \zeta \cos \theta & -\sin \zeta \sin \theta \\ \cos \zeta \sin \theta & \cos \zeta \cos \theta \end{vmatrix} (at)^2 d\zeta d\theta \\ &= (at)^2 \sin \zeta \cos \zeta d\zeta d\theta. \end{aligned}$$

其中

$$\cos \zeta = \frac{\sqrt{(at)^2 - \bar{y}_1^2 - \bar{y}_2^2}}{at}.$$

所以

$$\begin{aligned}
 & \int \int_{S_{at}^{(x)}} \varphi(y_1, y_2) dS(y) \\
 = & \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varphi(x_1 + \bar{y}_1, x_2 + \bar{y}_2) (at)^2 \sin \zeta d\theta d\zeta \\
 = & 2 \int \int_{\{\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2 \leq (at)^2\}} \frac{\varphi(x_1 + \bar{y}_1, \varphi(x_2 + \bar{y}_2) (at)}{\sqrt{(at)^2 - \bar{y}_1^2 - \bar{y}_2^2}} d\bar{y}_1 d\bar{y}_2 \\
 = & 2at \int \int_{\Sigma_{at}^{(x)}} \frac{\varphi(y_1, y_2)}{\sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} dy_1 dy_2,
 \end{aligned}$$

其中 $\Sigma_{at}^{(x)}$ 是以 x 为圆心, at 为半径的圆. 同样可处理后两项积分 ψ, f , 故有二维波动方程 Cauchy 问题的解表达式 (Poisson 公式)

$$\begin{aligned}
 u(x_1, x_2, t) = & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\pi a} \int \int_{\Sigma_{at}^{(x)}} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} dy \right] \\
 & + \frac{1}{2\pi a} \int \int_{\Sigma_{at}^{(x)}} \frac{\psi(y)}{\sqrt{(at)^2 - |y - x|^2}} dy \\
 & + \frac{1}{2\pi a} \int_0^t d\tau \int \int_{\Sigma_{a(t-\tau)}^{(x)}} \frac{f(y, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |y - x|^2}} dy.
 \end{aligned}$$

由 Poisson 公式知 $u(x_0, y_0, t_0)$ 仅由 φ, ψ 在依赖区域中的值以及 f 在特征锥 K 中的值决定. P_0 的依赖区域以外的波, 在 t_0 时刻内传播不到 (x_0, y_0) 处. 例如 (x_1, y_1) 处的波. D 中的初值 φ, ψ 会对且仅会对影响区域 J_D 内的任意点产生影响. F_D 中任意点处的 u 由 D 内的初值完全确定. 称其为 D 的决定区域.

下面介绍 Huygens 原理. 考虑 $n = 2$ (3.13) 或 $n = 3$ (3.12), 其中 $f \equiv 0$, 且 φ, ψ 仅在 D 内非零.

当 $n = 3$ 时,

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 < at < d_{\min}, \\ \text{非零}, & d_{\min} \leq at \leq d_{\max}, \\ 0, & at > d_{\max}. \end{cases}$$

波传播有前阵面和后阵面, 称为 Huygens 原理. 见图 13.

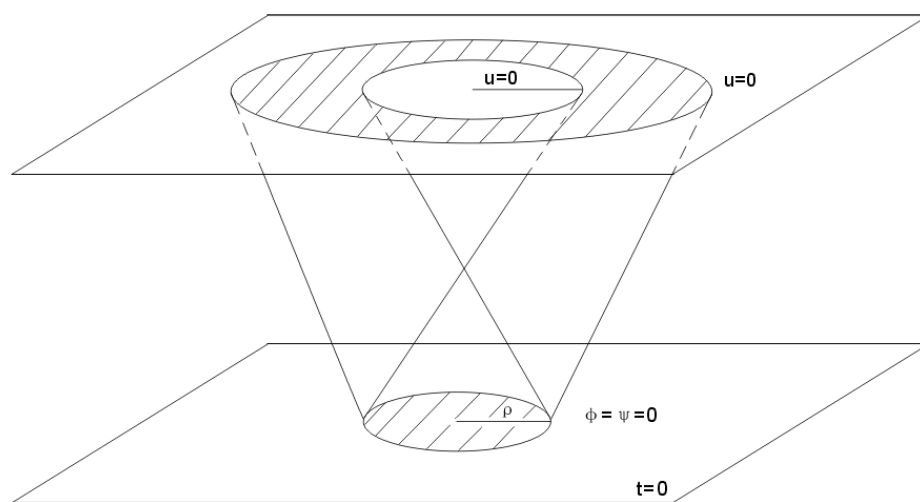
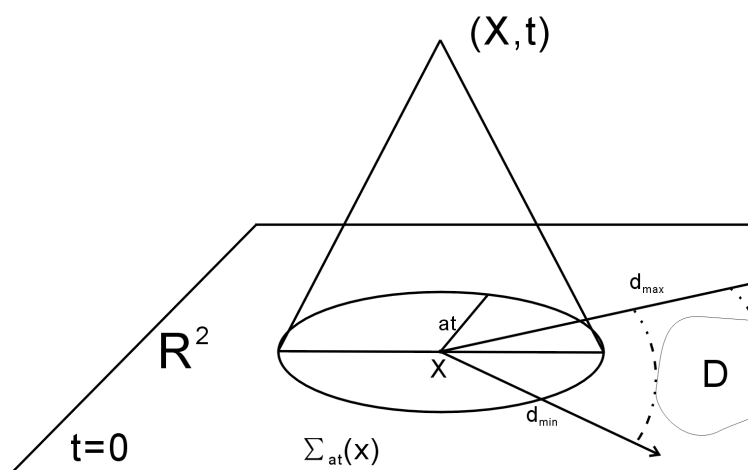


图 13. Huygens 原理 $n = 3$

当 $n = 2$ 时,

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 < at < d_{\min}, \\ \text{非零}, & at > d_{\min}. \end{cases}$$

有前阵面, 无后阵面. 见图 14.

图 14. $n = 2$

1.4 分离变量法与初边值问题

本节将介绍用分离变量法解下述波动方程初边值问题

$$\begin{cases} \partial_{tt}u = a^2\partial_{xx}u, & \forall x \in (0, l), \forall t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & \forall x \in [0, l], \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & \forall x \in [0, l]. \end{cases} \quad (4.1)$$

1.4.1 分离变量法

令 $u(x, t) = X(x)T(t)$. 把它代入方程组 (4.1) 的第一式并化简, 有

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad (\text{其中 } \lambda \text{ 是与 } x, t \text{ 无关的常数}).$$

又由 (4.1) 的第二式知, $u(0, t) = X(0)T(t) = 0, u(l, t) = X(l)T(t) = 0$, 而 $T(t) \neq 0$, 故有

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & \forall x \in (0, l) \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

同样可以得到

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad \forall t > 0. \quad (4.3)$$

先求解 (4.2). 它有两个未知量, 特征值 λ 和特征函数 $X(x)$. 而且 $X(x) \neq 0$, 因为 $X(x) \equiv 0$ 是平凡解. (4.2) 为 Sturm-Liouville 问题的一个特例.

当 $\lambda < 0$ 时, $X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. 由 $X(0) = X(l) = 0$ 知, $C_1 = C_2 = 0$;

当 $\lambda = 0$ 时, $X(x) = C_1 x + C_2$. 由 $X(0) = X(l) = 0$ 知, $C_1 = C_2 = 0$;

当 $\lambda > 0$ 时, $X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$. 由 $X(0) = X(l) = 0$ 知, $C_1 = 0, C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0$.

为了使 $C_2 \neq 0$, 必须使 $\sqrt{\lambda}l = n\pi, n = \pm 1, \pm 2, \dots$. 于是得到特征值为

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi}{l^2}, n = 1, 2, 3, \dots,$$

特征函数为

$$X_n(x) = C \sin \frac{n\pi}{l}x, n = 1, 2, \dots.$$

对于 $n = -1, -2, \dots$ 的情况, 由于

$$\sin \frac{n\pi}{l}x = (-1)^{|n|} \sin \frac{|n|\pi}{l}x,$$

所以可以归结为 $n > 0$ 的情况, 只需以 $-C$ 代替 C 即可.

下面求解 (4.3). 由刚才的求解可以知道 λ 只能取特征值 λ_n , 故

$$T_n(t) = A_n \sin \frac{n\pi a}{l}t + B_n \cos \frac{n\pi a}{l}t,$$

其中 A_n, B_n 为任意常数.

于是我们得到无数个满足方程组 (4.1) 的第一式和第二式的解:

$$u_n(x, t) = \left(A_n \sin \frac{n\pi a}{l} t + B_n \cos \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.4)$$

为了使这个解满足方程组 (4.1) 的第三式和第四式, 对 $u_n(x, t)$ 进行线性叠加, 然后选择 A_n, B_n , 使 (4.1) 的第三式和第四式也满足. 因此, 有

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{n\pi a}{l} t + B_n \cos \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x, \\ u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \\ \partial_t u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x. \end{array} \right.$$

附注: $\{\sin \frac{n\pi}{l} x\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L^2[0, l]$ 中的完备正交系. 故若 $\varphi, \psi \in L^2[0, l]$, 那么它们就有展开

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \sin \frac{n\pi}{l} x, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \\ \psi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \end{aligned}$$

所以只需取

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx,$$

$$A_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx,$$

那么 (4.1) 的第三式和第四式也就满足了. 由此, 我们便得到了混合问题 (4.1) 的形式解. 进一步, 若 φ, ψ 满足一定的条件, 我们可以证明它确实是 (4.1) 的解.

定理 4.1. 若 $\varphi \in C^3[0, l], \psi \in C^2[0, l]$, 而且它们有相容性, 即

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

那么 (4.4) 给出的 $u \in C^2([0, l] \times [0, T])$ 是 (4.1) 的解.

附注: 由 (4.1) 的第二式, 第三式和第四式可以看出 φ, ψ 具有相容性的必要性.

证明: Step 1. 为了证明形式解 (4.4) 确实是解, 关键在于证明所求微商和取极限的过程可以与和号交换. 具体说来, 即需要证明:

$$\begin{aligned} \square \sum_{n=1}^{\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \square u_n, \\ \lim_{x \rightarrow 0, l} \sum_{n=1}^{\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0, l} u_n, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^m u_n}{\partial t^m} \right), \quad (m = 0, 1). \end{aligned}$$

根据数学分析课程中的熟知结论, 为了证实上述运算是合法的, 只需要证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} D u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} D^2 u_n$$

(D 表示对 x, t 的一阶微商) 在区域 $\bar{Q} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ (T 任意) 上一致收敛.

Step 2. 由定理的假设以及分部积分公式, 有

$$A_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx = -\frac{l^3}{a(n\pi)^3} a_n,$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi''(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

同理

$$B_n = -\frac{l^3}{(n\pi)^3} b_n,$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi'''(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

从而在 $\bar{Q} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ 上, 我们有估计

$$\begin{aligned} |u_n(x, t)| &\leq |A_n| + |B_n| = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \\ |Du_n(x, t)| &= O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ \sum_n |D^2 u_n(x, t)| &\approx \sum_n a_n \frac{1}{n} + b_n \frac{1}{n} \\ &\leq \left(\sum_n a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_n \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

这里“ O ”依赖于 l, a 和 $\int_0^l |\varphi'''| dx, \int_0^l |\psi''| dx$.

从 Fourier 级数的 Bessel 不等式知

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &\leq \frac{2}{l} \int_0^l |\psi''(x)|^2 dx, \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 &\leq \frac{2}{l} \int_0^l |\varphi'''(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

因此我们证明了前面列举的所有级数在 \bar{Q} 上一致收敛. 从而得到: 由表达式 (4.4) 给出的函数 $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 属于 $C^2(\bar{Q})$, 这就是“相容性条件”的必要性, 可以将 u 逐项对 x, t 微分两次, 并适合方程组 (4.1) 的边界条件. Q.E.D

习题:

1. 证明定理 2.2.
2. [7] 15(pp.88), 17(pp.88), 18(pp.89).

第 2 章

热方程

下列热传导方程是典型的抛物型方程

$$\partial_t u = a^2 \Delta u + f.$$

下面我们介绍三维热传导方程的导出. 室内 D 一点 (x, y, z) 处时刻 t 的温度为 $u(x, y, z, t)$. 内部 ΔV 体积的区域内, 温度从 $u(x, y, z, t_1)$ 升高到 $u(x, y, z, t_2)$ 所需的热量为

$$c[u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)]\rho\Delta V,$$

其中 c 为比热, 即单位质量温度升高 1 度所需的热量, ρ 为体密度.

δt 时间内经表面 ΔS 流入室内的热量为 $k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Delta S\Delta t$. 由 Gauss 公式,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int \int_{\partial D} k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = \int_{t_1}^{t_2} k dt \int \int \int_D \Delta_{(x,y,z)} u(x, y, z, t) dx dy dz,$$

又由 Fourier 定律,

$$\frac{1}{|D|(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} dt \int \int_{\partial D} k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|D|(t_2 - t_1)} \int \int \int_D c\rho \{u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)\} dx dy dz \\
&= \frac{1}{|D|(t_2 - t_1)} \int \int \int_D c\rho \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} dt dx dy dz.
\end{aligned}$$

令 $|D| \rightarrow 0, t_2 - t_1 \rightarrow 0$, 则有

$$\partial_t u = \frac{k}{c\rho} \Delta u = a^2 \Delta u.$$

2.1 Fourier 变换解 Cauchy 问题

2.1.1 Fourier 变换

设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 定义 f 的 Fourier 变换如下

$$F[f](\lambda) = \hat{f}(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\lambda x} dx.$$

例 1.1.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq A, \\ 0, & |x| > A. \end{cases}$$

其中 A 为大于零的常数. 则其 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A e^{-i\lambda x} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\lambda A)}{\lambda}.$$

Fourier 反演公式: 若 $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, 则

$$F^{-1}[\hat{f}](x) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = f(x).$$

上式左边是 \hat{f} 的 Fourier 逆变换, 右边的积分表示取 Cauchy 主值.

证明: Step 1. 因为

$$f \in L^1(\mathbb{R}),$$

所以

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx \quad \text{关于 } \lambda \text{ 一致收敛.}$$

又因为 \hat{f} 关于 λ 连续, 所以对任意的 $N > 0$ 和任意的 $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{i\lambda x} \hat{f}(\lambda) d\lambda \quad \text{存在,}$$

且有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{i\lambda x} \hat{f}(\lambda) d\lambda &= \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N e^{i\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{-N}^N e^{i\lambda(x-\xi)} d\lambda d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{\sin N(x-\xi)}{x-\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta+x) \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta \quad (\eta := \xi - x) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{-M} + \int_{-M}^M + \int_M^{\infty} \right] \\ &= J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

Step 2. 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $M_0 > 0$, 使得对任意的 $M > M_0$, 有

$$|J_1| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-M} f(\eta+x) \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta \right| \leq \frac{1}{\pi M} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \frac{\epsilon}{4}.$$

同理可得

$$|J_3| \leq \frac{1}{\pi M} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \frac{\epsilon}{4}.$$

Step 3. 固定 $M (> M_0)$.

$$\begin{aligned} J_2(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-M}^M \frac{f(x+\eta) - f(x)}{\eta} \sin(N\eta) d\eta + \frac{f(x)}{\pi} \int_{-M}^M \frac{\sin(N\eta)}{\eta} d\eta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-M}^M \int_0^1 f'(x+\tau\eta) d\tau \sin(N\eta) d\eta + \frac{f(x)}{\pi} \int_{-NM}^{NM} \frac{\sin(\eta)}{\eta} d\eta. \end{aligned}$$

令

$$g(x, \eta) := \int_0^1 f'(x + \tau\eta) d\tau,$$

由于 $f \in C^1(\mathbb{R})$, 所以 g 关于 (x, η) 连续. 因此存在 $N_0 > 0$, 使得对任意的 $N \geq N_0$,

$$|J_2(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{4} + |f(x)| \left| \frac{1}{\pi} \int_{-NM}^{NM} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta - 1 \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad \text{Q.E.D.}$$

附注 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta = \pi.$$

附注 2. Riemann 引理: 设 ψ 在 $[-M, M]$ 上可积且绝对可积, 则

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \psi(\eta) \sin(N\eta) d\eta = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-NM}^{NM} \psi\left(\frac{\eta}{N}\right) \frac{\sin \eta}{N} d\eta = 0.$$

2.1.2 Fourier 变换的性质

1. 线性: $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}, \forall f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$,

$$F[a_1 f_1 + a_2 f_2] = a_1 F[f_1] + a_2 F[f_2].$$

2. 若 $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$, 则

$$F[f'(x)](\lambda) = i\lambda F[f](\lambda).$$

推广: 若 $f(x), f'(x), \dots, f^{(m)}(x) \in L^1(\mathbb{R})$, 则 $\forall m \geq 1$

$$F\left[\frac{d^m f}{dx^m}\right](\lambda) = (i\lambda)^m F[f](\lambda).$$

因为

$$F\left[\frac{df}{dx}\right](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-i\lambda x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f(x)e^{-i\lambda x}]_{x=-\infty}^{\infty} + \frac{i\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x} dx \\
&= i\lambda F[f](\lambda).
\end{aligned}$$

例 1.2.

$$F\left[\frac{\partial^2 u(\cdot, t)}{\partial x^2}\right] = (i\lambda)^2 \hat{u}(\lambda, t),$$

其中 $\hat{u}(\lambda, t)$ 为 $u(x, t)$ 关于 x 的 Fourier 变换.

3. 若 $f(x), xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$, 则

$$F[xf(x)](\lambda) = i \frac{d}{d\lambda} F[f](\lambda).$$

因为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\lambda x} dx \quad \text{关于 } \lambda \text{ 局部一致收敛.}$$

所以 $F[f](\lambda)$ 关于 λ 可导, 且有

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} F[f](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} [f(x)e^{-i\lambda x}] dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -ixf(x)e^{-i\lambda x} dx \\
&= -iF[xf(x)](\lambda).
\end{aligned}$$

4. 平移: 若 $f \in L^1(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}$, 则 $F[f(x-a)](\lambda) = e^{-i\lambda a} F[f](\lambda)$.

因为

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-i\lambda x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-i\lambda(x-a)} e^{-i\lambda a} dx \\
&= \text{右边.}
\end{aligned}$$

5. 伸缩: 若 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 则对任意的 $k \neq 0$, 有

$$F[f(kx)](\lambda) = \frac{1}{|k|} F[f]\left(\frac{\lambda}{k}\right).$$

因为

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(kx) e^{-i\left(\frac{\lambda}{k}\right)(kx)} dx \\ &= \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(kx) e^{-i\left(\frac{\lambda}{k}\right)(kx)} dkx \quad (k > 0 \text{ 时}) \\ &= \frac{1}{k} F[f]\left(\frac{\lambda}{k}\right). \end{aligned}$$

$k < 0$ 时类似.

6. $F^{-1}[f(x)](\lambda) = F[f(x)](-\lambda)$.

$$\text{左边} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = \text{右边}.$$

7. 卷积: 对任意的 $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, 定义

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \quad \text{为 } f \text{ 与 } g \text{ 的卷积}.$$

则有

$$F[f * g](\lambda) = \sqrt{2\pi} F[f](\lambda) F[g](\lambda).$$

证明: Step 1. 因为

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \right| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)g(t)| dt, \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)g(t)| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| dx \\ &= \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} (< \infty), \end{aligned}$$

所以

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} (< \infty).$$

因此,

$$f * g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Step 2.

$$\begin{aligned} F[f * g](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\lambda t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(x-t)} f(x-t) dx \right) dt \\ &= \sqrt{2\pi} F[g](\lambda) F[f](\lambda). \quad \text{Q.E.D} \end{aligned}$$

例 1.3. $f(x) = e^{-x^2}$, 求 $F[f](\lambda)$.

解:

$$\begin{aligned} F[f](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-i\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-x^2}}{-i\lambda} \right]_{x=-\infty}^{\infty} + \frac{-2}{i\lambda\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} e^{-i\lambda x} dx \\ &= \frac{-2}{i\lambda} i \frac{d}{d\lambda} F[f](\lambda). \end{aligned}$$

考虑

$$\begin{cases} \frac{dF[f]}{d\lambda} + \frac{\lambda}{2} F[f] = 0, & \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\ F[f](0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\
 &= \int \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\
 &= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \\
 &= \pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr^2 \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$

由常微分方程理论知

$$F[f](\lambda) = C e^{-\frac{\lambda^2}{4}}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

例 1.4. $f(x) = e^{-Ax^2}$, $A > 0$ 为常数. 求 $F[f](\lambda)$.

$$\begin{aligned}
 F[f](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2} e^{-i\lambda x} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi A}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{y^2} e^{-i\frac{\lambda}{\sqrt{A}}y} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{(\frac{\lambda}{\sqrt{A}})^2}{4}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2A}} e^{-\frac{\lambda^2}{4A}}.
 \end{aligned}$$

2.1.3 用 Fourier 变换解热传导方程 Cauchy 问题

考虑热传导方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \partial_t u = a^2 \partial_{xx} u + f(x, t), & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, & (1.1) \\ u(x, 0) = \varphi(x), & \forall x \in \mathbb{R}. & (1.2) \end{cases}$$

如果 φ, f, u 关于 x 可求 Fourier 变换, 则有

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{u}(\lambda, t) = -a^2\lambda^2\hat{u}(\lambda, t) + \hat{f}(\lambda, t), & \forall t > 0, \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\varphi}(\lambda). \end{cases}$$

由此可以解得

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t} + \int_0^t \hat{f}(\lambda, \tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)} d\tau.$$

由例 1.4 知, 令 $A = \frac{1}{4a^2 t}$, 则有

$$F\left[\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\right](\lambda) = e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

由卷积性质知,

$$\begin{aligned} F^{-1}[\hat{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}](x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}}{a\sqrt{2t}} d\xi \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi. \end{aligned}$$

同理可得,

$$F^{-1}[\hat{f}(\lambda, \tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}](x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \tau) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi.$$

所以形式上有

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \\ &+ \int_0^t \frac{d\tau}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \tau) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi \quad (1.3) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x-\xi, t) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \tau) G(x-\xi, t-\tau) d\xi. \end{aligned}$$

令

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

$\Gamma(x, t; \xi, \tau) = G(x - \xi, t - \tau)$ 称为热传导方程的基本解.

定理 1.1. 设 $f \equiv 0, \varphi \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, 则上述公式 (1.3) 给出的是 (1.1)-(1.2) 的光滑有界解.

证明: Step 1. 此时由 (1.3) 可知,

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x - \xi, t) d\xi.$$

对任意的 $x \in \mathbb{R}, t > 0$ (固定), 上述积分关于 (x, t) 局部一致收敛且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) D_x^\alpha D_t^\beta G(x - \xi, t) d\xi$$

仍然关于 (x, t) 局部一致收敛, 故求导与积分式可交换, 且 $u(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$.

由于

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x - \xi, t) - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x - \xi, t) = 0,$$

故

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0.$$

Step 2. 令

$$\eta = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}},$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + 2a\sqrt{t}\eta) e^{-\eta^2} d\eta,$$

则有

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(x + 2a\sqrt{t}\eta) e^{-\eta^2} d\eta \\ &= \varphi(x). \end{aligned} \quad \text{Q.E.D}$$

附注 1. 由 (1.3) 知, 若 f, φ 为 x 的奇(偶)函数, 则由 (1.3) 得到的解 u 为 x 的奇(偶)函数.

附注 2. $\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, 理论上”热”传播速度无限大(不一定).

附注 3. 初始 $\varphi(x)$ 的奇异点 $\in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ 不会影响 $u \in C^\infty(\forall t > 0)$, 即奇性不传播. 例如: $\varphi'(x)$ 不连续.

2.2 分离变量法解初边值问题

2.2.1 齐次热传导方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 < x < l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

令 $u(x, t) = X(x)T(t)$, 并把它代入上面第一式和第三式, 可得

$$\begin{cases} \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, & 0 < x < l, t > 0, \\ X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

其中 λ 为常数. 于是可以分别得到关于 t 和 x 的方程,

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \forall t > 0, \quad (3.2)$$

和

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < \forall x < l, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

我们知道 (3.3) 是特征值问题, 即 Sturm-Liouville 问题. 和波动方程类似, (3.3) 有解

$$X(x) = C_1 \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \cos \sqrt{\lambda} x, \quad \lambda \geq 0.$$

由 $X(0) = 0$ 得到, $C_2 = 0$; 又由 $X(l) = 0$ 得到, $C_1 \sin \sqrt{\lambda}l = 0$. 因此仅当

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n = 1, 2, \dots \text{时, (3.3) 有非零解.}$$

所以有

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l}x.$$

由 (3.2) 可得

$$T_n(t) = \exp(-a^2\lambda_n t) = \exp[-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t].$$

所以, 我们有如下满足 (3.1) 的第一式和第三式的函数级数

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp[-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

此时

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

若 φ 可依 $\{\sin(\frac{n\pi}{l}x)\}_n$ 展开, 例如 $\varphi \in L^2[0, l]$, 则有

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l}x.$$

因此, 只要取

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx,$$

那么 (3.1) 的第二式也满足. 所以 (3.1) 的形式解是

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \exp[-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

2.2.2 非齐次热传导方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 < x < l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

设对任意的 $t > 0$, $f(\cdot, t) \in L^2[0, l]$. 则对任意固定的 $t > 0$ 以下展开在 L^2 中收敛

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

其中

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

把 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$ 代入方程, 得到

$$\begin{cases} T_n'(t) + (\frac{n\pi a}{l})^2 T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(0) = \varphi_n. \end{cases} \quad (3.5)$$

由此可以解得

$$T_n(t) = \varphi_n \exp[-(\frac{n\pi a}{l})^2 t] + \int_0^t f_n(\tau) \exp[-(\frac{n\pi a}{l})^2 (t - \tau)] d\tau.$$

于是我们就得到了 (3.4) 的形式解,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ \varphi_n \exp[-(\frac{n\pi a}{l})^2 t] \\ &+ \int_0^t f_n(\tau) \exp[-(\frac{n\pi a}{l})^2 (t - \tau)] d\tau \} \sin \frac{n\pi x}{l}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

附注 1. 可以证明, 当 φ, f 满足一定的条件时, (3.6) 给出的解 u 是 (3.4) 的解.

附注 2. 当 (3.4) 中的边界条件为非齐次时, 例如对任意的 $t \geq 0$,

$$u(0, t) = g_1(t), \quad u(l, t) = g_2(t).$$

可以先作如下变换

$$v(x, t) = u(x, t) - \left(1 - \frac{x}{l}\right)g_1(t) - \frac{x}{l}g_2(t),$$

则 v 满足齐次边界条件

$$v(0, t) = v(l, t) = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

从而归结为问题 (3.4) .

第 3 章

位势方程

我们考虑两类最典型的椭圆型方程. 它们是 Poisson 方程 (位势方程)

$$\Delta_x u = f(x),$$

和 Laplace 方程

$$\Delta_x u = 0.$$

当波动方程的解趋于平稳, 即 $t \rightarrow \infty$ 时, 波动方程趋向于 Poisson 方程或 Laplace 方程. 同样对抛物型方程而言, 当温度趋于稳定时, 热方程趋向于 Poisson 方程或 Laplace 方程.

3.1 基本解

考虑下述广义函数的方程

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \Delta_x U = \delta(x). \quad (1.1)$$

命题 1.1. 当 $n \geq 3$ 时, (1.1) 的广义解是

$$U(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}},$$

其中 $\omega_n = 2\pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma(\frac{n}{2})$ 为 n 维单位球面的面积.

当 $n = 2$ 时, (1.1) 的广义解是

$$U(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}.$$

证明: 以 $n = 3$ 为例. 对任意 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, 有

$$\begin{aligned} & (\Delta_x U, \varphi(x)) \\ &= (U, \Delta_x \varphi(x)) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x|}, \Delta_x \varphi(x) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \int \int_{\{|x| \geq \epsilon\}} \frac{1}{|x|} \Delta_x \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int \int \int_{\{|x| \geq \epsilon\}} \operatorname{div}_x \left(\frac{1}{|x|} \nabla_x \varphi(x) \right) dx \right. \\ &\quad \left. - \int \int \int_{\{|x| \geq \epsilon\}} \nabla_x \frac{1}{|x|} \cdot \nabla_x \varphi(x) dx \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int \int_{\{|x| = \epsilon\}} \vec{n} \cdot \left(\frac{1}{|x|} \nabla_x \varphi(x) \right) dS_\epsilon \right. \\ &\quad \left. - \int \int \int_{\{|x| \geq \epsilon\}} \operatorname{div}_x \left(\varphi(x) \nabla_x \frac{1}{|x|} \right) dx \right. \\ &\quad \left. + \int \int \int_{\{|x| \geq \epsilon\}} \varphi(x) \Delta_x \frac{1}{|x|} dx \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int \int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS_\epsilon - \int \int_{\partial B_\epsilon(0)} \varphi \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} dS_\epsilon \right. \\ &\quad \left. + \int \int \int_{\{|x| \geq \epsilon\}} \varphi(x) \Delta_x \frac{1}{|x|} dx \right\} \\ &= \varphi(0) \\ &= (\delta(x), \varphi(x)). \quad \text{Q.E.D} \end{aligned}$$

附注: $U(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

命题 1.2. 设 $f(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 且 $\text{supp} f$ 紧, 则对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\Delta_x u = f(x) \quad (1.2)$$

的解可表示为

$$(U * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x - \xi) f(\xi) d\xi.$$

记 $\Gamma(x - \xi) := U(x - \xi)$ 为 Laplace 方程的基本解.

证明: 对任意的 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, 因为 $\text{supp} f$ 紧, 故由广义函数卷积的定义知,

$$\begin{aligned} (U * f, \varphi) &= (U_x \otimes f_\xi, \varphi(x + \xi)) \\ &= (f_\xi, (U_x, \varphi(x + \xi))) \\ &= (f_\xi, (U_{x-\xi}, \varphi(x))) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} U(x - \xi) \varphi(x) dx d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} U(x - \xi) f(\xi) d\xi \right) dx \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} U(x - \xi) f(\xi) d\xi, \varphi(x) \right). \end{aligned}$$

因此, 当 $U, f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 时, $U * f$ 与通常的定义相同.

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} (\Delta_x(U * f), \varphi) &= (U * f, \Delta_x \varphi) \\ &= (f_\xi, (U_x, \Delta_x \varphi(x + \xi))) \\ &= (f_\xi, (\Delta_x U_x, \varphi(x + \xi))) \\ &= (f_\xi, (\delta(x), \varphi(x + \xi))) \\ &= (f, \varphi). \quad \text{Q.E.D} \end{aligned}$$

3.2 Green 函数

考虑下述 Poisson 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta_x u = f(x), & \forall x \in \Omega, \\ u(x) = \varphi(x), & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

以及 Poisson 方程的 Neumann 问题,

$$\begin{cases} -\Delta_x u = f(x), & \forall x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = \varphi(x), & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 $\vec{n}(x)$ 为 $x \in \partial\Omega$ 处的单位外法向量.

第二 Green 公式: 设 Ω 为 \mathbb{R}^n 中区域, $\partial\Omega$ 分段光滑, 则对任意的 $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, 有

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}) d\sigma. \quad (2.3)$$

证明:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (u\Delta_x v - v\Delta_x u) dx \\ &= \int_{\Omega} \{\operatorname{div}(u\nabla_x v) - \nabla_x u \cdot \nabla_x v - \operatorname{div}(v\nabla_x u) + \nabla_x u \cdot \nabla_x v\} dx \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(u\nabla_x v - v\nabla_x u) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot (u\nabla_x v - v\nabla_x u) d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}) d\sigma. \quad \text{Q.E.D} \end{aligned}$$

定理 2.1. 设 $\partial\Omega$ 光滑, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 为

$$-\Delta_x u = f(x), \quad \forall x \in \Omega$$

的解, 则

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Omega} \Gamma(y-x)f(y)dy \\ &+ \int_{\partial\Omega} [\Gamma(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial\vec{n}} - \frac{\partial\Gamma}{\partial\vec{n}}(y-x)u(y)]d\sigma(y). \quad (2.4) \end{aligned}$$

证明: 因为对任意的 $y \neq x$, $\Delta_y\Gamma(y-x) = 0$, 所以

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} [-\Gamma(y-x)\Delta_y u(y)]dy \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus B_{\epsilon}(x)} [u(y)\Delta_y\Gamma(y-x) - \Gamma(y-x)\Delta_y u(y)]dy \\ &= \int_{\partial\Omega} [u(y)\frac{\partial\Gamma}{\partial\vec{n}}(y-x) - \Gamma(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial\vec{n}}]d\sigma(y) \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_{\epsilon}(x)} [u(y)\frac{\partial\Gamma}{\partial\vec{n}}(y-x) - \Gamma(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial\vec{n}}]d\sigma(y). \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_{\epsilon}(x)} [u(y)\frac{\partial\Gamma}{\partial\vec{n}}(y-x)]d\sigma(y) &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\partial B_{\epsilon}(x)} u(y)\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\frac{1}{|y-x|^{n-2}}d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_{\epsilon}(x)} u(y)\frac{1}{|y-x|^{n-1}}d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_{\epsilon}(x)} u(y)\frac{1}{\epsilon^{n-1}}d\sigma(y) \\ &\rightarrow u(x), \quad \epsilon \rightarrow 0. \\ \int_{\partial B_{\epsilon}(x)} [\Gamma(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial\vec{n}}]d\sigma(y) &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\partial B_{\epsilon}(x)} \frac{1}{|y-x|^{n-2}}\frac{\partial u(y)}{\partial\vec{n}}d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\partial B_{\epsilon}(x)} \frac{1}{\epsilon^{n-2}}\frac{\partial u(y)}{\partial\vec{n}}d\sigma(y) \\ &\rightarrow 0. \quad \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [-\Gamma(y-x)\Delta_y u(y)] dy \\ &= \int_{\partial\Omega} [u(y)\frac{\partial\Gamma}{\partial\vec{n}}(y-x) - \Gamma(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial\vec{n}}] d\sigma(y) + u(x). \quad \text{Q.E.D} \end{aligned}$$

由于 (2.4) 并没有完全给出 (2.1) 的解, 我们对此作进一步的讨论.

设 $g \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 在 Ω 内满足

$$\Delta_y g = 0. \quad (2.5)$$

由 Green 第二公式, 有

$$\int_{\Omega} (u\Delta g - g\Delta u) dy - \int_{\partial\Omega} (u\frac{\partial g}{\partial\vec{n}} - g\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}) d\sigma = 0. \quad (2.6)$$

将 (2.4) 和 (2.6) 相加可以得到

$$\begin{aligned} u(x) &= (-1) \int_{\Omega} [\Gamma(y-x) + g(y)] \Delta_y u(y) dy \\ &+ \int_{\partial\Omega} \{ [\Gamma(y-x) + g(y)] \frac{\partial u(y)}{\partial\vec{n}} - \frac{\partial}{\partial\vec{n}} [\Gamma(y-x) + g(y)] u(y) \} d\sigma(y). \end{aligned}$$

对任意固定的 $x \in \Omega$, 取 $g(y, x)$, 使得

$$G(y, x) = g(y, x) + \Gamma(y-x) = 0, \quad \forall y \in \partial\Omega.$$

显然, 由 (2.5) 式和对任意的 $y \in \Omega$, 有

$$\Delta_y G(y, x) = \Delta_y \Gamma(y-x) + \Delta_y g = \Delta_y U(y-x) = \delta(y-x).$$

称 $G(x, y)$ 为 Ω 的 (Dirichlet) Green 函数, 如果对任意的 $y \in \Omega$ 的内部, 有

$$\begin{cases} \Delta_x G(x, y) = \delta(x-y), & \forall x \in \Omega, \\ G(x, y) = 0, & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

命题 2.2. 设 u 为 (2.1) 的解, $G(x, y)$ 为 Ω 的 Green 函数, 则 u 可以表示为

$$u(x) = \int_{\Omega} G(y, x) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} G(y, x) \varphi(y) d\sigma(y). \quad (2.8)$$

命题 2.3.

$$G(x, y) = G(y, x).$$

证明: $\forall x, z \in \Omega$, 记 $\Omega_{\epsilon} := \Omega \setminus (B_{\epsilon}(x) \cup B_{\epsilon}(z))$, 则

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_{\epsilon}} [G(y, x) \Delta_y G(y, z) - G(y, z) \Delta_y G(y, x)] dy \\ &= \int_{\partial\Omega} [G(y, x) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(y, z) - G(y, z) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(y, x)] d\sigma(y) \\ &+ \int_{\partial B_{\epsilon}(x)} [G(y, x) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(y, z) - G(y, z) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(y, x)] d\sigma(y) \\ &+ \int_{\partial B_{\epsilon}(z)} [G(y, x) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(y, z) - G(y, z) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(y, x)] d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial B_{\epsilon}(x)} [G(y, x) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(y, z) - G(y, z) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(y, x)] d\sigma(y) \\ &+ \int_{\partial B_{\epsilon}(z)} [G(y, x) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(y, z) - G(y, z) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(y, x)] d\sigma(y). \end{aligned}$$

类似定理 2.1 的证明, 我们有

$$\begin{aligned} &\int_{\partial B_{\epsilon}(x)} [G(y, x) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(y, z) - G(y, z) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(y, x)] d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial B_{\epsilon}(x)} \{[\Gamma(y-x) + g(y, x)] \frac{\partial}{\partial \vec{n}} [\Gamma(y-z) + g(y, z)] \\ &- [\Gamma(y-z) + g(y, z)] \frac{\partial}{\partial \vec{n}} [\Gamma(y-x) + g(y, x)]\} d\sigma(y) \\ &\rightarrow (-1)[\Gamma(x-z) + g(x, z)] = (-1)G(x, z), \quad \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

同理可得

$$\int_{\partial B_{\epsilon}(z)} [G(y, x) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(y, z) - G(y, z) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(y, x)] d\sigma(y)$$

$$\rightarrow \Gamma(z-x) + g(z, x) = G(z, x), \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

故

$$G(x, z) = G(z, x). \quad \text{Q.E.D}$$

3.3 Laplace 方程与调和函数

设 Ω 是 \mathbb{R}^n 中有界区域, 考虑下述 Ω 中的 Laplace 方程

$$\forall x \in \Omega, \quad \Delta u(x) = 0. \quad (4.1)$$

(4.1) 的解称为 Ω 中的调和函数 (≥ 0 : 下调和函数; ≤ 0 : 上调和函数).

由定理 2.1 中的式 (2.4)

$$\forall x \in \Omega, \quad u(x) = \int_{\partial\Omega} [\Gamma(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \Gamma(y-x) u(y)] d\sigma(y). \quad (2.4)$$

以及 $\Gamma(y-x)$ 在 $x \neq y$ 时无穷次可导知, u 在 Ω 内可无穷次求导. 又由方程 (4.1) 知 u 的任意阶导数也是 (4.1) 的解.

平均值定理: 设 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 为 Ω 中的调和函数, 则对任意的球 $B_R(y) \subset \Omega$, 有

$$\begin{aligned} u(y) &= \frac{1}{n\bar{\omega}_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(y)} u(x) dS_R(x) \\ &= \frac{1}{\bar{\omega}_n R^n} \int_{B_R(y)} u(x) dx, \end{aligned}$$

其中 $\bar{\omega}_n$ 为 n 维单位球的体积, $n\bar{\omega}_n$ 为 n 维单位球面的面积.

证明: 对任意的 $\rho \in (0, R]$, 由散度定理 (即 Green 公式) 可得

$$\int_{\partial B_\rho(y)} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(x, dS(x)) = \int_{B_\rho(y)} \Delta u(x) dx = 0. \quad (4.2)$$

又因为

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\partial B_\rho(y)} \frac{\partial u(x)}{\partial n} dS_\rho(x) \\
 &= \int_{\partial B_\rho(y)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(y + \rho\omega) dS_\rho(x) \\
 &= \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(y + \rho\omega) \rho^{n-1} dS(\omega) \\
 &= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{\partial B_1(0)} u(y + \rho\omega) dS(\omega) \\
 &= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho(y)} u(x) dS_\rho(x) \right].
 \end{aligned}$$

其中 $\omega := \frac{x-y}{|x-y|} \in \partial B_1(0)$, $dS(\omega)$ 为单位球面上的面积元, 故对任意的 $\rho \in (0, R]$, 有

$$\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho(y)} u(x) dS_\rho(x) = R^{1-n} \int_{\partial B_R(y)} u(x) dS_R(x).$$

令 $\rho \rightarrow 0$, 则

$$\int_{\partial B_1(0)} u(y + \rho\omega) dS(\omega) = u(y) n \bar{\omega}_n.$$

故

$$u(y) = \frac{1}{n \bar{\omega}_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(y)} u(x) dS_R(x).$$

又对任意的 $\rho \in (0, R]$, 有

$$\int_0^R n \bar{\omega}_n \rho^{n-1} u(y) d\rho = \int_0^R d\rho \int_{\partial B_\rho(y)} u(x) dS_\rho(x) = \int_{B_R(x)} u(x) dx. \quad \text{Q.E.D}$$

Liouville 定理: 设 u 是全空间 \mathbb{R}^n 上的有界调和函数, 则 $u \equiv$ 常数.

证明: 由于 u 是调和函数, 故 u 满足

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \Delta u(x) = 0.$$

由命题 4.1, 对任意的 $i, \partial_{x_i} u(x)$ 也满足 Laplace 方程

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \Delta\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right) = 0.$$

故对任意的 $y \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(y)}{\partial x_1} &= \frac{1}{\bar{\omega}_n R^n} \int_{B_R(y)} \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} dx \\ &= \frac{1}{\bar{\omega}_n R^n} \int_{0 \leq \sum_{i=2}^n (x_i - y_i)^2 \leq R^2} dx_2 \cdots dx_n \int_{y_1 - \sqrt{R^2 - \sum_{i=2}^n (x_i - y_i)^2}}^{y_1 + \sqrt{R^2 - \sum_{i=2}^n (x_i - y_i)^2}} \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} dx_1 \\ &\rightarrow 0, \quad \text{当 } R \rightarrow \infty \text{ 时.} \end{aligned}$$

同理有

$$\frac{\partial u(y)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

由 y 的任意性知, $u \equiv$ 常数. Q.E.D

附注: 上述定理中的条件可以减弱为 u 有上界 (或下界).

第 4 章

一阶偏微分方程组与二阶线性偏微分方程分类

4.1 二阶偏微分方程的分类

考虑一般的关于未知函数 $u(x, y)$ 的线性二阶偏微分方程

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d, \quad (5.1)$$

其中 $a(x, y), b(x, y), c(x, y), d(x, y)$ 为已知函数.

设 γ 为 $x - y$ 平面中的曲线

$$\gamma : \begin{cases} x = f(s), \\ y = g(s). \end{cases} \quad (5.2)$$

其中 $s \in \mathbb{R}$ 为参变量. 在 γ 上给定 Cauchy 初值

$$u = h(s), u_x = \phi(s), u_y = \psi(s).$$

(5.2) 中给定的函数必须满足如下相容性条件,

$$\frac{du(f(s), g(s))}{ds} = u_x(f(s), g(s))f'(s) + u_y(f(s), g(s))g'(s),$$

即

$$h'(s) = \phi(s)f'(s) + \psi(s)g'(s). \quad (5.3)$$

故 h, ϕ, ψ 中至多两个可任意取. 同样对 $u_x(f(s), g(s)), u_y(f(s), g(s))$ 也有相应的条件,

$$\frac{du_x(f, g)}{ds} = u_{xx}(f, g)f'(s) + u_{xy}(f, g)g'(s),$$

$$\frac{du_y(f, g)}{ds} = u_{yx}(f, g)f'(s) + u_{yy}(f, g)g'(s),$$

即

$$\phi'(s) = u_{xx}f'(s) + u_{xy}g'(s) \quad \text{on } \gamma, \quad (5.4)$$

$$\psi'(s) = u_{yx}f'(s) + u_{yy}g'(s) \quad \text{on } \gamma. \quad (5.5)$$

由 (5.1), (5.4), (5.5) 可唯一确定 u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} 在 γ 上值的充要条件是

$$D(s) := \begin{vmatrix} f'(s) & g'(s) & 0 \\ 0 & f'(s) & g'(s) \\ a(f, g) & 2b(f, g) & c(f, g) \end{vmatrix} = a(g')^2 - 2bf'g' + c(f')^2 \neq 0 \quad \text{on } \gamma.$$

若在 γ 上 $D(s) = 0$, 则称 γ 为特征线. 此时, 要解出 γ 上的 u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} , 需要

$$g'(s) = \frac{dy}{ds},$$

$$f'(s) = \frac{dx}{ds}.$$

于是有

$$a(dy)^2 - 2bdydx + c(dx)^2 = 0 \quad \text{on } \gamma.$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \quad (5.6)$$

考虑

$$au_{x_1x_1} + 2bu_{x_1x_2} + cu_{x_2x_2} = d, \quad (5.7)$$

为简便计, 设 $a > 0, b, c$ 为常数, $d = d(x_1, x_2, u_{x_1}, u_{x_2})$ 为 $x_1, x_2, u_{x_1}, u_{x_2}$ 的已知函数.

Case 1. $ac - b^2 > 0$.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} u = d$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^{tr}$$

此时 A 正定. 其中 T 是正交阵, T^{tr} 是 T 的转置, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ 是 A 的特征值.

令

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T^{tr} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

则

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = d.$$

令

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} y_1, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} y_2,$$

则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \Delta_x u = d.$$

于是 (5.7) 为椭圆型方程.

Case 2. $ac - b^2 = 0$.

(5.7) 为抛物型方程. 例如 $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$,

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = d(y, u_{y_1}, u_{y_2}).$$

Case 3. $ac - b^2 < 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$.

令

$$t := \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} y_1, \quad x := \frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}} y_2,$$

则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = d.$$

于是 (5.7) 为双曲型.

4.2 特征流形与 Cauchy 问题局部唯一可解性 (在实解析函数类中)

设未知函数向量 $u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_N(x) \end{pmatrix}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 满足 m 阶拟线性方程组

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha D^\alpha u + C = 0, \quad (6.1)$$

其中 $A_\alpha = A_\alpha(x, D^\beta u)$ 是 $N \times N$ 阶矩阵, $C = C(x, D^\beta u)$ 是 $N \times 1$ 向量, 其元素都是 $x, D^\beta u, (|\beta| \leq m-1)$ 的已知函数,

$$D^\alpha u := \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ 称为多重指标,

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

设 $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = 0\}$ 是 \mathbb{R}^n 中超曲面, 由函数 ϕ 的 0-等高面定义。假设 ϕ 是正则的: $D\phi \neq 0$ 。不妨设在 S 上 $\partial_{x_n} \phi \neq 0$ 。

对任意的 $x \in S$ 和任意的 $\beta: |\beta| \leq m-1$, 给定 S 上 Cauchy 初值

$$D^\beta u(x), \quad (6.2)$$

要想得到在 S 某邻域内唯一的解, 就必须且只需从 (6.1) 及相容性条件组成的线性方程组 (其中 $D^\beta u, |\beta| \leq m-1$ 由 (6.2) 给出) 在 S 上唯一解出 $D^\alpha u (|\alpha| = m)$. 此时称 S 是非特征的.

定义 6.1. S 是特征流形, 若 S 的任一部分都不是非特征的.

Case 1. $S = \{x_n = 0\}$.

$\alpha^* := (0, 0, \dots, 0, m)$, $\forall \alpha: |\alpha| = m, \alpha \neq \alpha^*$, $D^\alpha u(x)$ 在 S 上都可以由 (6.2) 计算得到. 由于

$$A_{\alpha^*} D^{\alpha^*} u(x) = (-1) \left(\sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \forall \alpha \neq \alpha^*}} A_\alpha D^\alpha u(x) + C \right),$$

$D^{\alpha^*} u$ 在 S 上可唯一解的充分必要条件是行列式 $|A_{\alpha^*}| \neq 0$.

设 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 是多重指标. $\forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, 记

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n},$$

其中规定 $0^0 = 1$. 则 $D^{\alpha^*} u$ 在 S 上可唯一解的充分必要条件可写成

$$\det \left(\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha (D\phi)^\alpha \right) \neq 0.$$

令 $U = (u, \partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u, \dots, \partial_{x_1}^{m-1} u, \dots, \partial_{x_n}^{m-1} u)^{tr}$. U 是

$$N' = N \times n \times (m-1) + N$$

维列向量。

若 $S = \{x_n = 0\}$ 是非特征的, 则 A_{α^*} 在 S 上可逆. 因此, 在 S 上 (6.1) 可以写成如下标准型

$$\frac{\partial}{\partial x_n} U = \sum_{i=1}^{n-1} a^i(x, U) \frac{\partial}{\partial x_i} U + b(x, U). \quad (6.3)$$

Case 2. 一般情况下, 因为 ϕ 是正则的: $D\phi \neq 0$, 不妨设对任意的 $x \in S$, $\partial_{x_n} \phi(x) \neq 0$. 作如下坐标变换

$$\begin{cases} y_i = x_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ y_n = \phi(x) \end{cases}$$

可归结为 Case 1. 作变量代换, 在 S 上 (6.1) 也可以写成标准型 (6.3)。由以下 Cauchy-Kowalevski 定理, 我们有 (6.1) 在非特征流形上给定 Cauchy 初值问题局部解的存在和唯一性。

Cauchy-Kowalevski 定理. 设 a^i, b 是变量 $z = (x_1, \dots, x_{n-1}, U) \in \mathbb{R}^{N'+n-1}$ 在 $z = 0$ 处的实解析函数, 那么方程 (6.3) 在给定 Cauchy 初值

$$U = 0, \quad \{x_n = 0\}, \quad (6.4)$$

后, (在实解析函数类中) 有且仅有唯一的解 $U(x)$, 且 $U(x)$ 在原点 $x = 0$ 处实解析.

定理证明参考 [9] (P.75-76) .

定义 6.2. $Lu := \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha D^\alpha u$ 是椭圆型算子, 当且仅当

$$\det \left(\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha \xi^\alpha \right) \neq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

第 5 章

Sobolev 空间与广义函数

5.1 Sobolev 空间

Sobolev 空间与弱解是现代偏微分方程理论最基本的概念。我们以 Cauchy 问题 (2.3) 为例来解释它们的重要性。 $\forall \eta(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, T])$, 方程 (2.3) $\times \eta$ 后积分得到 (其中假设 $a = 1$)

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}_x} u(x, t)(\partial_{tt} - \partial_{xx})\eta(x, t)dx - \int_{\mathbb{R}_x} \eta(x, 0)\partial_t u(x, 0)dx + \int_{\mathbb{R}_n} \partial_t \eta(x, 0)u(x, 0)dx \\ &= \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}} f(x, t)\eta(x, t)dx \end{aligned}$$

所以若 u 是 (2.3) 的解, 则下式 $\forall \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, T])$ 都成立。

$$\int_0^T dt \int_{\mathbb{R}} \eta(x, t)f(x, t)dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} u(x, t)\square\eta(x, t)dx - \int_{\mathbb{R}} \eta(x, 0)\psi(x)dx + \int_{\mathbb{R}} \partial_t \eta(x, 0)\varphi(x)dx$$

反之, $\forall \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, T])$, 若 u 都满足上式, 则称 u 为 (2.3) 在 $(0, T)$ 内的弱解. 注意到上式只要求弱解可积, 我们需要在 L^p 空间和 Sobolev 空间中研究弱解。

首先定义可积函数弱导数的概念。记

$$D^\alpha \varphi := \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ 称为多重指标,

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

假设给定 \mathbb{R}^n 上局部可积函数 f 与 g , 若

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

那么就说 g 是 f 的 α 阶弱导数, $D^\alpha f = g$.

下面介绍 Sobolev 空间 $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, 其中 $m, p \in \mathbb{N}, p \geq 1$.

当 $m = 0$ 时, $W^{0,p}(\mathbb{R}^n) := L^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p < \infty\}$. 其上定义范数

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \right)^{1/p}.$$

当 $m = 1$ 时, $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) := \{f(x) : f \in L^p(\mathbb{R}^n), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq i \leq n\}$, 其中的导数理解为弱导数, 范数如下定义

$$\|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

类似地, 我们可以给出当 $m \geq 2$ 的定义. 可以证明 $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 是 Banach 空间, 而 $W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$ 是 Hilbert 空间 (例如, 参见 [11]). 当 $p = 2$ 时记

$$H^m(\mathbb{R}^n) = W^{m,2}(\mathbb{R}^n).$$

Sobolev 不等式.[8] 设 $1 \leq p < q \leq \infty, m \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{m}{n}.$$

则存在常数 $C = C(p, q, m, n) > 0$, 使得

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{|\alpha|=m} \|D_x^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

进一步, 如果 $p > n/m$, 则

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \|D_x^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n).$$

定义 $W_0^{m,p}[0, l]$ 为 $C_0^\infty[0, l]$ 在空间 $W^{m,p}(\mathbb{R})$ 中的闭包, 继承 $W^{m,p}(\mathbb{R})$ 的范数

$$\|u\|_{W_0^{m,p}[0, l]} = \|u\|_{L^p[0, l]} + \sum_{1 \leq k \leq m} \|\partial_x^k u\|_{L^p[0, l]}.$$

命题 2.5.[11] $W_0^{1,2}[0, l]$ 是 Hilbert 空间, 其中内积定义为

$$(u, v)_{W_0^{1,2}} := \int_0^l \{u'v' + uv\} dx.$$

由 (2.8)-(2.11) 知,

命题 2.6. 若 $f \in L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t^+)$, $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$, $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, 则波动方程 Cauchy 问题 (2.3) 的解在 $H^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t^+)$ 中唯一存在, 并且解 u 连续依赖于初值 φ, ψ 及右端项 f .

同样, 我们有

命题 2.7. 若 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$, $f \in L^1([0, \tau]; L^2(\mathbb{R}_x))$, 那么 (2.3) 的解 $u(x, t)$ 若存在则唯一, 且

$$u \in C([0, \tau]; H^1(\mathbb{R}_x)) \cap C^1([0, \tau]; L^2(\mathbb{R}_x)).$$

证明: 若 $u \in C^2$, 且对于足够大的 $x, u = 0$,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \{|\partial_t u(x, t)|^2 + |\partial_x u(x, t)|^2\} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \{2\partial_{tt} u(x, t)\partial_t u(x, t) + 2\partial_x u(x, t)\partial_x \partial_t u(x, t)\} dx \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}} \partial_t u(x, t)\{\partial_{tt} u(x, t) - \partial_{xx} u(x, t)\} dx \\ &\leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_t u(x, t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x, t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}} \{|\partial_t u(x, t)|^2 + |\partial_x u(x, t)|^2\} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x, t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}} \{|\partial_t u(x, \tau)|^2 + |\partial_x u(x, \tau)|^2\} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \{|\psi(x)|^2 + |\varphi'(x)|^2\} dx \right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^\tau \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x, t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^2 dx &= 2 \int_{\mathbb{R}} u(x, t)\partial_t u(x, t) dx \\ &\leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_t u(x, t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_t u(x, t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

我们有

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |u(x, \tau)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^\tau dt \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_t u(x, t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

此时, 结论成立. 一般地, 由于当 $|x| \rightarrow \infty$ 时, f, φ 和 ψ 趋于零, 以及由 1.2 节波传播速度的有限性, 在有限时刻 $t, u(x, t) \rightarrow 0$ ($|x| \rightarrow \infty$), 结论依然成立. Q.E.D

5.2 广义函数

5.2.1 广义函数及其性质

定义函数空间 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \varphi \text{ 具有紧支集}\}$, 其中

$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, φ 的支集 $\text{supp } \varphi$ 定义为 $\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}$ 的闭包.

$\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$, 下面给出 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 中收敛的定义. 记

$$D^\alpha \varphi(x) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} \varphi(x).$$

序列 $\{\varphi_m\}_m \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 收敛于 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, 记为 $\varphi_m \rightarrow \varphi$, 当且仅当

(i) 存在 \mathbb{R}^n 的紧子集 K , 使得对任意的 $m, \text{supp } \varphi_m \subset K$,

(ii) 对任意的 α , 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \varphi_m(x) - D^\alpha \varphi(x)| \rightarrow 0$.

例 2.1.

$$\eta(x) = \begin{cases} C \exp\left[\frac{1}{|x|^2-1}\right], & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

注意到当 $r \rightarrow 1^-$ 时,

$$\frac{\partial}{\partial r} e^{\frac{1}{r^2-1}} = e^{\frac{1}{r^2-1}} \frac{-2r}{(r^2-1)^2} \rightarrow 0,$$

以及关于高阶导数的类似结果, 可以证明 $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \eta = \overline{B_1(0)}$.

所以 $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

令

$$\eta_\epsilon(x) := \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right),$$

可以证明 $\text{supp } \eta_\epsilon \subset \overline{B_\epsilon(0)}$.

定义 2.1. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 上的连续线性泛函 f 称为广义函数, 记为 $f(\varphi) = (f, \varphi)$.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 上广义函数的全体记为 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 是线性空间, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中的序列 $\{f_n\}_n$ 收敛于 $f \in \mathcal{D}'$, 记为 $f_n \rightarrow f$.

当且仅当对任意的 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, 有 $f_n(\varphi) \rightarrow f(\varphi)$.

例 2.2. 对每一个给定的 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 都对应一个 $f^* \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

因为线性泛函

$$f^*(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

关于 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 中收敛拓扑连续, 故 $f^* \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. 以下简记 f^* 为 f .

例 2.3. δ - 函数.

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \delta_a(\varphi) := \varphi(a).$$

当 $a = 0$ 时, $\delta_0 := \delta$. 可以验证 $\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. 进一步, 我们还可以证明不存在 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$\delta(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx.$$

因为对任意的 $\epsilon > 0$,

$$\delta(\eta_\epsilon) = \epsilon^{-1}.$$

另一方面由 Lebesgue 控制收敛定理

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\eta_\epsilon(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta_\epsilon(x)dx = 0.$$

定义 2.2. 对任意的广义函数 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 它的偏导数 $\partial_{x_j} f$ 定义为

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \frac{\partial}{\partial x_j} f(\varphi) := (-1) f\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right).$$

附注 1. $\partial_{x_j} f$ 为 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 上线性泛函.

附注 2. $\partial_{x_j} f$ 连续. 因为若在 \mathcal{D} 内

$$\varphi_m \rightarrow \varphi,$$

则在 \mathcal{D} 内, 有

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_m \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi.$$

于是有

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(\varphi_m) = (-1) f\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j}\right) \rightarrow (-1) f\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(\varphi).$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad (\text{亦为广义函数}).$$

命题 2.1. 广义函数的任意阶偏导数仍为广义函数.

例 2.4. $\forall f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f, \varphi\right) = (-1) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x) dx,$$

即与分部积分公式一致. 由此可见, 1.2.4 节中定义的弱导数是广义导数的特例.

例 2.5. 考虑 Heaviside 函数

$$h(x) := \begin{cases} 0, & \forall x \in (-\infty, 0), \\ 1, & \forall x \in [0, \infty). \end{cases}$$

因为

$$(h, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)dx = \int_{[0, \infty)} \varphi(x)dx,$$

故 $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. 又因为

$$\left(\frac{d}{dx}h, \varphi\right) = (-1) \int_{\mathbb{R}} h(x)\frac{d\varphi}{dx}dx = (-1) \int_{[0, \infty)} \frac{d\varphi}{dx}dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

所以

$$\frac{dh}{dx} = \delta.$$

定义 2.3. 对任意的 $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 和任意的 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 因为

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \psi\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

又因为在 \mathcal{D} 内

$$\varphi_m \rightarrow \varphi,$$

则在 \mathcal{D} 内, 有

$$\psi\varphi_m \rightarrow \psi\varphi.$$

所以 $(f, \psi\varphi)$ 是关于 φ 的广义函数. 记为 ψ 与 f 的乘积 ψf ,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad (\psi f, \varphi) := (f, \psi\varphi).$$

命题 2.2. $\forall \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \forall f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi f) = \psi \frac{\partial}{\partial x_j} f + \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\psi\right)f.$$

证明: $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi f), \varphi\right) &= (-1)(\psi f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}) \\ &= (-1)(f, \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}) \end{aligned}$$

$$= (-1)(f, \frac{\partial}{\partial x_j}(\psi\varphi)) + (f, (\frac{\partial}{\partial x_j}\psi)\varphi). \quad \text{Q.E.D}$$

定义 2.4. 设 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 则 f 在 Ω 上等于零的充要条件是 $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, 若 $\text{supp } \varphi \subset \Omega$, 则 $(f, \varphi) = 0$.

定义 f 的支集 $\text{supp } f := \mathbb{R}^n \setminus \{\text{使 } f \text{ 等于零的最大开集}\}$. 使 f 等于零的最大开集的存在性证明可参考文献 [11].

例 2.6. δ_a 的支集为 $\text{supp } \delta_a = \{a\}$.

定义 2.5. 广义函数的平移: 设 $f_x = f(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, 对任意的 $y \in \mathbb{R}^n$, 有

$$(f(x-y), \varphi(x)) := (f_x, \varphi(x+y)).$$

显然 $f_{x-y} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 且当 $f \in L^1_{\text{loc}}$ 时, 与 L^1_{loc} 中平移一致.

例 2.7.

$$\delta_a(x) = \delta(x-a).$$

命题 2.3. $\forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, \forall \varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$, 存在 x 与 y 变量分离的函数列

$$\varphi_k(x, y) = \sum_{j=1}^{j_k} \nu_{k_j}(x) w_{k_j}(y),$$

使得在 \mathcal{D} 内, 有 $\varphi_k \rightarrow \varphi$.

证明参考文献 [11]. Q.E.D.

命题 2.4. 设

$$x \in \mathbb{R}_x^n, y \in \mathbb{R}_y^m, \quad \varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m}), \quad f_x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x^n),$$

则

$$(f_x, \varphi(x, y)) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_y^m).$$

证明: 我们仅证明 $n = m = 1$ 的情况. 一般情况下的证明可参考 [11]. 因为

$$\frac{d}{dy}(f_x, \varphi(x, y)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{(f_x, \varphi(x, y+h)) - (f_x, \varphi(x, y))\}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} (f_x, \frac{\varphi(x, y+h) - \varphi(x, y)}{h}) \quad (\text{由 } f_x \text{ 的线性}) \\
&= (f_x, \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)) \quad (\text{由 } f_x \text{ 的连续性}),
\end{aligned}$$

故可证明

$$(f_x, \varphi(x, y)) \in C^\infty(\mathbb{R}_y^m).$$

又因为 $\varphi(x, y)$ 关于 y 在 \mathbb{R}_y^m 中有紧支集, 对任意固定的 x , $M_x = \mathbb{R}_y^m \setminus \{y : \varphi(x, y) = 0\}$ 是 \mathbb{R}_y^m 中的紧子集. 则对任意的 $y \notin M_x$, 有

$$(f_x, \varphi(x, y)) = 0,$$

故

$$(f_x, \varphi(x, y)) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_y^m). \quad \text{Q.E.D}$$

定义 2.6. $\forall f_x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \forall g_y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m), (g_y, (f_x, \varphi(x, y))), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ 为 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ 上的连续线性泛函. 记为 f_x 与 g_y 的张量积 $f_x \otimes g_y$.

由命题 2.3,

$$\begin{aligned}
(f_x \otimes g_y, \varphi) &= \lim_k (f_x \otimes g_y, \varphi_k) = \lim_k \sum_{j=1}^{j_k} (f_x \otimes g_y, v_{k_j}(x) w_{k_j}(y)) \\
&= \lim_k \sum_{j=1}^{j_k} (g_y, (f_x, v_{k_j}(x) w_{k_j}(y))) = \lim_k \sum_{j=1}^{j_k} (g_y, w_{k_j}(y)) (f_x, v_{k_j}(x)) \\
&= (g_y \otimes f_x, \varphi).
\end{aligned}$$

命题 2.5. $f_x \otimes g_y = g_y \otimes f_x$, 且 $\text{supp}(f_x \otimes g_y) = \text{supp}f_x \times \text{supp}g_y$, 其中 \times 为笛卡儿乘积.

例 2.8.

$$\delta(x, y) = \delta(x) \otimes \delta(y),$$

因为对任意的 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m)$,

$$(\delta(x, y), \varphi(x, y)) = \varphi(0, 0)(\delta(x), (\delta(y), \varphi(x, y)))$$

$$\begin{aligned}
&= (\delta(x), \varphi(x, 0)) \\
&= \varphi(0, 0).
\end{aligned}$$

命题 2.6. $\forall f, \forall g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, 设 $\text{supp } f$ 为 \mathbb{R}^n 中紧子集, 则

$$(\text{supp } f \times \text{supp } g) \cap \{(x, y) : \varphi(x+y) \neq 0\} \subset (\text{supp } f \times \mathbb{R}^n) \cap \{(x, y) : \varphi(x+y) \neq 0\}$$

为 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 中紧子集.

定义 2.6. 设 $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, f 有紧支集, 定义 f 与 g 的卷积 $f * g$ 为

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad (f * g, \varphi) := (f_x \otimes g_y, \alpha(x, y)\varphi(x + y)).$$

其中 $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ 满足

$$\forall (x, y) \in (\text{supp } f \times \text{supp } g) \cap \text{supp } \varphi(x + y), \quad \alpha(x, y) \equiv 1.$$

显然上述定义与 α 的选取无关, 且 $f * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), f * g = g * f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

附注. 当 $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 时, $(f * g, \varphi) = (f_x, (g_y, \varphi(x + y)))$ 与 §(2.1) 中卷积的定义一致.

5.2.2 广义函数的应用

下面考虑关于广义函数的下述热方程的解 $K(x, t)$.

$$u_t - a^2 u_{xx} = \delta(x, t), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

命题 2.7. $\forall f(x, t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, 若 $K(x, t)$ 为 (2.1) 的解, 则 $K * f$ 为下述方程的解,

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

证明: $\forall \varphi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, 有

$$((\partial_t - a^2 \partial_{xx})(K * f), \varphi) = (K * f, (-1)(\partial_t + a^2 \partial_{xx})\varphi(x, t))$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)(f_{x,t}, (K_{y,s}, (\partial_t + a^2 \partial_{xx})\varphi(x+y, t+s))) \\
&= (f, ((\partial_s - a^2 \partial_{yy})K, \varphi(x+y, t+s))) \\
&= (f, \varphi(x, t)). \quad \text{Q.E.D}
\end{aligned}$$

附注. $\partial_t + a^2 \partial_{xx}$ 称为 $\partial_t - a^2 \partial_{xx}$ 的形式共轭算子.

命题 2.8.

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}, & \forall t > 0, \\ 0, & \forall t \leq 0. \end{cases}$$

证明: $\forall \varphi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, 有

$$\begin{aligned}
&((\partial_t - a^2 \partial_{xx})K, \varphi) \\
&= (K, (-1)(\partial_t + a^2 \partial_{xx})\varphi) \\
&= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}{2a\sqrt{\pi t}} (L^* \varphi)(x, t) dx dt \quad \text{其中 } (L^* \varphi)(x, t) := (-1)(\partial_t + a^2 \partial_{xx})\varphi \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^\infty dt \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}{2a\sqrt{\pi t}} (L^* \varphi)(x, t) dx dt \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-1) \int_\epsilon^\infty \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}{2a\sqrt{\pi t}} \varphi(x, t) dx \right] dt \\
&+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^\infty dt \int_{-\infty}^\infty [(\partial_t - a^2 \partial_{xx}) \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}{2a\sqrt{\pi t}}] \varphi(x, t) dx \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2 \epsilon}}}{2a\sqrt{\pi \epsilon}} \varphi(x, \epsilon) dx + 0 \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} \varphi(2a\sqrt{\epsilon} \eta, \epsilon) d\eta \\
&\quad (\text{其中 } \eta := \frac{x}{2a\sqrt{\epsilon}}) \\
&= \varphi(0, 0) = (\delta, \varphi).
\end{aligned}$$

又因为 (2.1) 在 \mathcal{D}' 中解唯一, 故命题得证.

Q.E.D.

根据命题 2.7-2.8, 我们有 (1.1)-(1.2) 的解表达式

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (K(\cdot, t) * \varphi)(x) + (K * f)(x, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} K(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}} K(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} K(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}} K(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi. \end{aligned}$$

令 $\Gamma(x, t; \xi, \tau) := K(x - \xi, t - \tau)$, 我们称 Γ 为 Cauchy 问题的基本解.

考虑下述半无界的初边值问题

$$\begin{cases} u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t), & \forall x > 0, \forall t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & \forall x \geq 0, \\ u(0, t) = 0, & \forall t > 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

设 $\varphi(0) = 0$, 即满足相容性条件 (使得以下定义的 $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$), 用延拓法将 (2.3) 转化为 (1.1)-(1.2) 的形式. 令

$$U(x, t) := \begin{cases} u(x, t), & \forall x \geq 0, \\ -u(-x, t), & \forall x < 0, \end{cases}$$

$$\phi(x) := \begin{cases} \varphi(x), & \forall x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & \forall x < 0, \end{cases}$$

$$F(x, t) := \begin{cases} f(x, t), & \forall x \geq 0, \\ -f(-x, t), & \forall x < 0. \end{cases}$$

现考虑下述 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \partial_t U = a^2 \partial_{xx} U + F, & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \\ U(x, 0) = \phi(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.4)$$

由 (1.3) 解表达式知, F, ϕ 是 x 的奇函数, 所以 (2.4) 的 (1.3) 形式的解 U 关

于 x 为奇函数. 因此对任意的 $t > 0$,

$$U(0, t) = 0,$$

且 $U(x, t)$ 满足 (2.3) 的第二式,

$$U(x, 0) = \varphi(x), \forall x \geq 0,$$

故 $\forall x \geq 0, \forall t \geq 0, u(x, t) := U(x, t)$ 为 (2.3) 的解, 且有下列解表达式

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} K(x - \xi, t) \phi(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}} K(x - \xi, t - \tau) F(\xi, \tau) d\xi \\ &= \int_0^\infty [K(x - \xi, t) - K(x + \xi, t)] \varphi(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_0^t d\tau \int_0^\infty [K(x - \xi, t - \tau) - K(x + \xi, t - \tau)] f(\xi, \tau) d\xi. \end{aligned}$$

称 $\Gamma(x, t; \xi, \tau) = K(x - \xi, t) - K(x + \xi, t)$ 为半无界问题 (2.3) 的基本解.

5.3 弱解

第 6 章

二阶线性椭圆型方程

6.1 极值原理

6.1.1 极值原理

设 Ω 是 \mathbb{R}^n 中有界开区域, 记

$$Lu := -\Delta u + c(x)u, \quad u^+(x) := \max\{u(x), 0\}, \quad u^-(x) := \min\{u(x), 0\}.$$

命题 3.1. 设对任意的 $x \in \Omega, c(x) \geq 0, u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. 若对任意的 $x \in \Omega, Lu(x) < 0$, 且

$$u^+(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u(x) \quad (\text{或 } u^-(x_0) = \min_{\bar{\Omega}} u(x)),$$

则 $x_0 \in \partial\Omega$.

证明:(用反证法) 如若不然, 设 $x_0 \in \Omega$ 的内部, 且 $u^+(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u(x)$, 则有

$$\Delta u(x_0) \leq 0, \quad Lu(x_0) \geq 0.$$

这与 $\forall x \in \Omega, Lu(x) < 0$ 矛盾.

类似地, 若 $u^-(x_0) = \min_{\bar{\Omega}} u(x)$.

令 $v(x) = -u(x)$, 由上述结论可知 $x_0 \in \partial\Omega$. Q.E.D

弱极值原理: 设 $c(x) \geq 0$, 且 $c = \max_{\bar{\Omega}} c(x) (< \infty)$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. 若对任意的 $x \in \Omega$, $Lu(x) \leq 0$ (≥ 0). 则

$$\sup_{x \in \Omega} u^+(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u^+(x), \quad (\inf_{x \in \Omega} u^-(x) = \inf_{x \in \partial\Omega} u^-(x)).$$

证明: 对任意的 $\epsilon > 0$, 令

$$w(x) = u(x) + \epsilon e^{ax_1},$$

其中 a 待定. 则对任意的 $x \in \Omega$, 有

$$\begin{aligned} Lw(x) &= Lu(x) + \epsilon e^{ax_1}(-a^2 + c(x)) \\ &\leq \epsilon e^{ax_1}(-a^2 + c) < 0, \quad (\text{取 } a^2 > c). \end{aligned}$$

由命题 3.1 知,

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} u(x) &\leq \sup_{\Omega} w(x) = \sup_{\Omega} w^+(x) \\ &= \sup_{\partial\Omega} w^+(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u^+(x) + \epsilon \sup_{\partial\Omega} e^{ax_1} \\ &\rightarrow \sup_{\partial\Omega} u^+(x), \quad \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

类似地可证下确界的结论. Q.E.D

强极值原理: 设 Ω 为有界连通开区域, 对任意的 $x \in \Omega$, $c(x) \geq 0$, 且 $c = \max_{\bar{\Omega}} c(x) (< \infty)$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. 若对任意的 $x \in \Omega$, 有 $Lu(x) \leq 0$. 若存在 $\tilde{x} \in \Omega$ 的内部, 使得 $u(\tilde{x}) = \sup_{\Omega} u(x)$, 且 $u(\tilde{x}) > 0$, (或 $u(\tilde{x}) = \inf_{\Omega} u(x)$, 且 $u(\tilde{x}) < 0$), 则对任意的 $x \in \Omega$, $u(x) \equiv$ 常数. 证明: Step 1. 令

$$M = \sup_{\bar{\Omega}} u(x) = \sup_{\bar{\Omega}} u^+(x) (\geq 0), \quad E := \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}.$$

由 $u \in C(\bar{\Omega})$ 知, E 在 Ω 中相对闭. 且由 $\{\tilde{x} \in E\}$ 知 $\{E \neq \emptyset\}$. 若 $E \subsetneq \Omega$, 则

存在 $x_0 \in \partial E \setminus \partial\Omega$ 和 $r > 0$, 使得 $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$, 又存在 $B_d(\bar{x}) \subset B_{2r}(x_0)$, 使得

$$d = \text{dist}(\bar{x}, E) = \text{dist}(\bar{x}, y), \quad y \in \frac{\partial E}{\partial\Omega}.$$

且对任意的 $x \in B_d(\bar{x})$ 的内部, 有

$$u(x) < u(y) = M.$$

Step 2. 设 $B_d(\bar{x})$ 为 \mathbb{R}^n 中的球, 对任意的 $x \in B_d(\bar{x})$, $c(x) \geq 0$, 且 $c(x)$ 有界.

若 $u(x) \in C^2(B_d(\bar{x})) \cap C(\overline{B_d(\bar{x})})$ 满足

- (1) $\forall x \in B_d(\bar{x}), \quad Lu(x) \leq 0;$
- (2) 存在 $y \in \partial B_d(\bar{x})$, 使得 $u(y) \geq 0$ 且

$$\forall x \in \overline{B_d(\bar{x})} \setminus \{y\}, \quad u(x) < u(y).$$

则对任意的方向 $\nu, \nu \cdot u(y) > 0$, 有

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) > 0.$$

证明: 令

$$v(x) = e^{-a|x|^2} - e^{-ad^2}, \quad (a > 0 \text{ 待定}), \quad \rho = |x|.$$

$\forall x \in B_d(\bar{x}) \setminus B_{\frac{d}{2}}(\bar{x})$, 有

$$\begin{aligned} Lv(x) &= (-1) \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} v + \frac{n-1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} \right] + c(x)v \\ &= (-1) \left[4a^2 \rho^2 - 2a + \frac{n-1}{\rho} (-2a\rho) \right] e^{-a\rho^2} + c(x) [e^{-a\rho^2} - e^{-ad^2}] \\ &\leq (-1) \left[4a^2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2a - 2a(n-1) \right] e^{-a\rho^2} + c(x) [e^{-ad^2} - e^{-ad^2}] \\ &< 0, \quad (\text{取 } a \text{ 充分大}). \end{aligned}$$

故 $\forall x \in B_d(\bar{x}) \setminus B_{\frac{d}{2}}(\bar{x}), \forall \epsilon > 0$, 有

$$L(u(x) - u(y) + \epsilon v(x)) < -c(x)u(y) \leq 0.$$

$\forall x \in \partial B_{\frac{d}{2}}(\bar{x})$, 当 ϵ 充分小时, 有

$$u(x) - u(y) + \epsilon v(x) \leq \sup_{\partial B_{\frac{d}{2}}(\bar{x})} u(x) - u(y) + \epsilon(e^{-\frac{ad^2}{4}} - e^{-ad^2}) < 0.$$

又 $\forall x \in \partial B_d(\bar{x})$,

$$u(x) - u(y) + \epsilon v(x) = u(x) - u(y) \leq 0.$$

由弱极值原理, $\forall x \in B_d(\bar{x}) \setminus B_{\frac{d}{2}}(\bar{x})$, 有

$$u(x) - u(y) + \epsilon v(x) \leq 0.$$

所以

$$\frac{u(y) - u(y - t\vec{n})}{t} \geq (-1)\epsilon \frac{v(y) - v(y - t\vec{n})}{t}.$$

令 $t \rightarrow 0$, 我们有

$$\frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}} \geq (-1)\epsilon \frac{\partial v(y)}{\partial \vec{n}} = (-1)\epsilon(-2ad)e^{-ad^2}.$$

又对任意的方向 ν 满足 $\nu \cdot \vec{n}(y) > 0$, 所以

$$\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} = \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}} \cos(\nu, \vec{n}(y)) > 0.$$

Step 3. 一方面由 Step 2,

$$\frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}} > 0;$$

另一方面由于 $y \in E$, E 是闭集, 有

$$\frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}} = 0.$$

矛盾! 故 $E = \Omega$. Q.E.D

6.1.2 应用极值原理估计解的上、下界

考虑 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & \forall x \in \Omega, \\ u(x) = \varphi(x), & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

定理 3.1. 设 Ω 是 \mathbb{R}^n 中的有界区域, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 为 (3.1) 的解, 则存在常数 $C > 0$, 使得

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |\varphi(x)| + C \sup_{\Omega} |f(x)|. \quad (3.2)$$

证明: 不妨设 $0 \in \Omega$ 的内部, 记 $d = \dim(\Omega)$, 令

$$z(x) = \frac{F}{2n}(d^2 - |x|^2) + \Phi,$$

其中

$$F = \sup_{\Omega} |f(x)|, \quad \Phi = \max_{\partial\Omega} |\varphi(x)|.$$

显然有

$$\begin{aligned} \Delta z(x) &= \left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(-\frac{F}{2n} \right) r^2 \\ &= -\frac{F}{n} + \frac{n-1}{n} (-F) \\ &= -F. \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{cases} -\Delta(-z(x)) = -F \leq -\Delta u(x) = f(x) \leq F = -\Delta z(x), & \forall x \in \Omega, \\ (-1)z(x) \leq (-1)\Phi \leq \varphi(x) = u(x) \leq \Phi = z(x), & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

由弱极值原理,

$$\forall x \in \bar{\Omega}, \quad -z(x) \leq u(x) \leq z(x). \quad \text{Q.E.D}$$

附注: 定理 3.1 的一个直接推论是 Dirichlet 问题 (3.1) 在 $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 中解惟一.

命题 3.2. 对任意的 $x \in \Omega \setminus \{y\}$, 有

$$0 < G(x, y) \leq \begin{cases} \frac{C}{|x-y|^{n-2}}, & n \geq 3, \\ C \ln \frac{1}{|x-y|}, & n = 2. \end{cases}$$

6.2 变分方法

6.2.1 变分方法

设 Ω 是 \mathbb{R}^n 中有界区域. 定义如下 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}, p \geq 1$,

当 $k = 0$ 时, $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$;

当 $k = 1$ 时, $W^{1,p}(\Omega) := \{f : f, \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), i = 1, \dots, n\}$, $\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} :=$

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)},$$

其中导数理解为弱导数. $k \geq 2$ 时可类推.

命题 5.1. $W^{k,p}(\Omega)$ 是 Banach 空间. 当 $p = 2$ 时, $W^{k,p}(\Omega)$ 是 Hilbert 空间.

定义 $W_0^{k,p}(\Omega) = C_0^k(\Omega)$ 为在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的闭包. u 的能量泛函为

$$E(u) := \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - uf \right] dx.$$

命题 5.2. $E(u)$ 在 $W^{1,2}(\Omega)$ 中的临界点在弱导数意义下满足下列

Euler-Leagarge 方程

$$\begin{cases} (-1)\Delta u = f, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

证明: 记 $u_\epsilon(x) := u(x) + \epsilon\varphi(x)$, 对任意的 $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$,

$$\frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}E(u_\epsilon) = 0. \quad \text{Q.E.D}$$

能量不等式: 设 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 是如下 Poisson 方程 Dirichlet 问题的解

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & \forall x \in \Omega, \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.1)$$

由于

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta u)(u - \varphi) dx &= \int_{\Omega} f(u - \varphi) dx, \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u dx - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi &\leq \frac{c_\epsilon}{2} \int_{\Omega} f^2 + \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega} u^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^2. \end{aligned}$$

我们有估计

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \epsilon \int_{\Omega} u^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + c_\epsilon |f|^2 + \varphi^2.$$

类似地, 对 Poisson 方程 Neumann 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.2)$$

由于

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} (-\Delta u)u dx = \int_{\Omega} f u dx \leq \epsilon \int_{\Omega} u^2 dx + c_\epsilon \int_{\Omega} f^2 dx,$$

我们有估计

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \epsilon \int_{\Omega} u^2 dx \leq c_\epsilon \int_{\Omega} |f|^2 dx. \quad (5.3)$$

Poincaré 不等式: 对任意的 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, 存在只与区间 Ω 有关的常数

$C > 0$, 使得

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \quad (5.4)$$

证明: 对任意的 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, 存在 $\bar{x} = (\bar{x}_1, x_2, \dots, x_n) \in \partial\Omega$, 使得 $u(\bar{x}) = 0$ 以及

$$u(\bar{x}) - u(x) = \int_{x_1}^{\bar{x}_1} \frac{\partial u(y)}{\partial x_1} dy.$$

故

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{x_1}^{\bar{x}_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(y_1, x_2, \dots, x_n) dy_1 \right)^2 dx \\ &\leq C \int_{\Omega} \int_{x_1}^{\bar{x}_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(y_1, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dy_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &\leq C \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|^2 dx. \quad \text{Q.E.D} \end{aligned}$$

存在性定理: 设 H 是 Hilbert 空间, M 是 H 中弱闭子集. 设

$E(u) : u \in M \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 满足

(1) $\forall \{u_m\} \subset M$, 若 $\|u_m\| \rightarrow \infty$, 则 $E(u_m) \rightarrow \infty$;

(2) $\forall u \in M, \forall \{u_m\} \subset M$, 若 $u_m \rightharpoonup u$ weakly in H , 则 $E(u) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} E(u_m)$.

那么 $E(u)$ 在 M 中有下界, 并且存在 $u \in M$, 使得

$$E(u) = \inf_{v \in M} E(v).$$

证明: 令 $\alpha_0 = \inf_{v \in M} E(v)$. 不妨设 $\alpha_0 \neq \infty$, 由下确界定义知, 存在 $\{u_m\}_m \subset M$, 使得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E(u_m) = \alpha_0.$$

由 (1) 以及 $\alpha_0 \neq \infty$ 知, $\{u_m\}_m$ 在 H 中有界.

故由 M 弱闭知: 存在子序列 $\{u_{m_i}\}_i$ 和 $u \in M$, 使得当 $i \rightarrow \infty$ 时, $u_{m_i} \rightharpoonup u$.

由 (2),

$$E(u) \leq \liminf_i E(u_{m_i}) = \alpha_0.$$

由 α_0 定义知,

$$E(u) = \alpha_0 = \inf_M E(v).$$

若 $\alpha_0 = \infty$, 则任意取 $u \in M$, 定理结论都成立. Q.E.D

6.2.2 变分方法的应用

应用之一: 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中考虑 Dirichlet 问题 (5.1) 在 $\varphi \equiv 0$ 的情况下的解. 设 Ω 为 \mathbb{R}^n 中有界区域, $f \in L^2(\Omega)$, 记

$$E(u) := \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - f(x)u(x) \right] dx.$$

命题 5.3. 设 M 为 $W^{1,2}(\Omega)$ 中的闭集, 则 $E(u)$ 在 M 中满足存在性定理的 (1)-(2). 因此由存在性定理知, 存在 $u \in M$, 使得 $E(u) = \inf_M E(v)$.

证明: Step 1. 因为对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $C_{\epsilon} > 0$, 使得

$$E(u) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \epsilon \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx - \frac{C_{\epsilon}}{2} \int_{\Omega} |f|^2 dx.$$

由 Poincare 不等式知, 存在常数 $C_0 > 0$, 使得

$$E(u) \geq C_0 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{C_{\epsilon}}{2} \int_{\Omega} |f|^2 dx.$$

故对任意的 $\{u_m\} \subset M$, 当 $\|u_m\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \rightarrow \infty$ 时, $E(u_m) \rightarrow \infty$.

Step 2. 设 $u_m \rightharpoonup u$ weakly in M . 例如

$$\begin{cases} u_m \rightharpoonup u, & \text{weakly in } L^2(\Omega), \\ \partial_{x_k} u_m \rightharpoonup \partial_{x_k} u, & k = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

则对任意的 $f \in L^2(\Omega)$, 有

$$\int_{\Omega} u_m f dx \rightarrow \int_{\Omega} u f dx.$$

由共鸣定理,

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(\Omega)} &\leq \liminf_m \|u_m\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|\partial_{x_k} u\|_{L^2(\Omega)} &\leq \liminf_m \|\partial_{x_k} u_m\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}$$

故

$$E(u) \leq \liminf_m E(u_m). \quad \text{Q.E.D}$$

应用之二: 在 $W^{1,2}(\Omega)$ 中考虑 Dirichlet 问题在 $\varphi \neq 0$ 的情况下的解.

设 $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$, 记

$$M := \{v \in W^{1,2}(\Omega) : v - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)\}.$$

命题 5.4. M 在 $W^{1,2}(\Omega)$ 中弱闭, 且 $E(u)$ 在 M 上满足存在性定理的 (1)-(2). 故由存在性定理可知, 存在 $u \in M$, 使得 $E(u) = \inf_M E(v)$.

证明: 由泛函分析可知, M 弱闭.

Step 1.

$$\begin{aligned}E(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f(x)(u(x) - \varphi(x)) dx - \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \epsilon \int_{\Omega} |u - \varphi|^2 dx - c_{\epsilon} \int_{\Omega} |f|^2 dx - \int_{\Omega} f\varphi dx \\ &\geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\nabla(u - \varphi)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dx - \epsilon \int_{\Omega} |u - \varphi|^2 dx - c_{\epsilon} \int_{\Omega} |f|^2 dx \\ &\quad - \int_{\Omega} f\varphi dx \\ &\geq C_0 \int_{\Omega} |\nabla(u - \varphi)|^2 dx - C_{\epsilon} \int_{\Omega} |f|^2 dx - \int_{\Omega} f\varphi dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dx.\end{aligned}$$

Step 2. 与命题 5.3 同. Q.E.D

6.3 解的存在性与唯一性

6.4 Sturm-Liouville 问题

考虑 Sturm-Liouville 问题:

$$\begin{cases} (p(x)v'(x))' - q(x)v(x) + \lambda r(x)v(x) = 0, & a < x < b \\ \alpha_1 v'(a) - \beta_1 v(a) = 0 \\ \alpha_2 v'(b) + \beta_2 v(b) = 0 \end{cases}$$

其中 $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ 满足条件: 存在 $p_0 \geq 0$, $r_0 > 0$, 使得 $p(x) \geq p_0$, $r(x) \geq r_0$, $q(x) \geq 0$. 注意若 $p_0 = 0$, 那么上述问题是奇异 Sturm-Liouville 问题.

下述特征值问题为 Sturm-Liouville 问题的一个简单的例子,

$$\begin{cases} V''(x) + \lambda V(x) = 0, & 0 < x < l, \\ -\alpha_1 V'(0) + \beta_1 V(0) = 0, \\ \alpha_2 V'(l) + \beta_2 V(l) = 0, \end{cases}$$

其中 $\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0, \alpha_i + \beta_i \neq 0, i = 1, 2$.

为简便, 首先考虑 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \beta_1 = \beta_2 = 1$ 的情形. 此时,

$$\begin{cases} V''(x) + \lambda V(x) = 0, & 0 < x < l, \\ V(0) = V(l) = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

令 $L_{\sigma_0} V = (-1)V''(x) + \sigma_0 V(x)$, 则

$$L_{\sigma_0} V - \sigma_0 V = \lambda V,$$

对 $\forall u, V \in W_0^{1,2}[0, l]$, 令

$$\mathcal{H}_{\sigma_0}(u, V) := \int_0^l u'(x)V'(x)dx + \sigma_0 \int_0^l u(x)V(x)dx,$$

我们称任意一个两自变量函数 $\mathcal{H}(u, v)$ 为双线性形式, 如果 $\mathcal{H}(u, v)$ 关于第一变量 u 线性, 关于第二变量 v 共扼线性. \mathcal{H} 是有界和强迫的, 若存在常数 $C > 0, C_0 > 0$ 满足

$$|\mathcal{H}(u, v)| \leq C\|u\|_H\|v\|_H, \quad (\text{有界})$$

$$\mathcal{H}(u, u) \geq C_0\|u\|_H^2. \quad (\text{强迫})$$

显然, $\mathcal{H}_{\sigma_0}(u, V)$ 为定义在 $W_0^{1,2}[0, l]$ 上的双线性形式, 而且存在常数 $C > 0$, 满足

$$|\mathcal{H}_{\sigma_0}(u, V)| \leq C\|u\|_{W_0^{1,2}}\|V\|_{W_0^{1,2}}, \quad (\text{有界})$$

$$\mathcal{H}_{\sigma_0}(u, u) \geq \min\{1, \sigma_0\}\|u\|_{W_0^{1,2}}^2. \quad (\text{强迫})$$

Lax-Milgram 定理: 设 $\mathcal{H}(\cdot, \cdot)$ 是 Hilbert 空间 H 上的有界, 强迫的双线性形式, 则对任意的有界线性泛函 $F \in H^*$, 存在唯一的 $v \in H$, 使得对任意的 $u \in H$

$$\mathcal{H}(u, v) = F(u)$$

成立.

证明: 对任意的 $v \in H$, 有 $\mathcal{H}(\cdot, v) \in H^*$, 且

$$\|\mathcal{H}(\cdot, v)\|_{H^*} \leq C\|v\|_H.$$

那么根据 Reisz 表示定理, 可以得到存在唯一的 $w \in H$, 使得对任意的 $u \in H$, 有

$$\mathcal{H}(u, v) = (u, w)_H.$$

定义函数 $T: v \in H \rightarrow w = Tv \in H$.

Claim 1. T 线性, 有界且一一对应, 并且 T^{-1} 也是有界的. 根据 \mathcal{H} 的有界性, 有

$$\|Tv\|_H = \|w\|_H = \|\mathcal{H}(\cdot, v)\|_{H^*} \leq C\|v\|_H.$$

再根据 \mathcal{H} 的强迫性, 有

$$(v, Tv) = \mathcal{H}(u, v) \geq C_0 \|v\|_H^2, \quad (\exists C_0 > 0),$$

即

$$\|Tv\|_H \geq C_0 \|v\|_H.$$

Claim 2.

$$D(T^{-1}) = H.$$

根据 Claim 1 可知, $D(T^{-1})$ 是 H 中的闭子集. 若 $D(T^{-1}) \subsetneq H$, 那么存在 $z \neq 0 \in H$, 使得对任意的 $v \in H$, 有

$$(z, Tv) = 0.$$

特别地, 有

$$C_0 \|z\|_H^2 \leq \mathcal{H}(z, z) = (z, Tz) = 0,$$

与 $z \neq 0$ 矛盾.

对任意 $F \in H^*$, 根据 Riesz 表示定理, 存在唯一的 $y \in H$, 使得对任意的 $u \in H$, 有

$$F(u) = (u, y)_H.$$

根据 Claim 1 和 Claim 2, 存在唯一的 $v \in H$, 使得

$$Tv = y,$$

且

$$\|v\|_H \leq \|T^{-1}\| \|y\|_H = \|T^{-1}\| \|F\|_{H^*}. \quad \text{Q.E.D.}$$

对任意的 $u, v \in W_0^{1,2}[0, l]$, 令

$$(\mathcal{L}_{\sigma_0} v)(u) := \mathcal{H}_{\sigma_0}(u, v) = \int_0^l u'(x)v'(x) + \sigma_0 u(x)v(x) dx.$$

对固定的 v , $\mathcal{L}_{\sigma_0}v$ 是 $W_0^{1,2}[0, l]$ 上的有界线性泛函。 $\mathcal{L}_{\sigma_0} : W_0^{1,2} \rightarrow (W_0^{1,2})^*$ 是 L_{σ_0} 的延拓: 因为, 若 $v \in W_0^{1,2}[0, l]$ 且 $v'' \in L^2[0, l]$, 则 $\forall u \in W_0^{1,2}[0, l]$

$$\begin{aligned} \int_0^l (L_{\sigma_0}v)u dx &= \int_0^l u(x)[-v''(x) + \sigma_0v(x)] dx \\ &= \int_0^l u'(x)v'(x) + \sigma_0u(x)v(x) dx \\ &= \mathcal{H}_{\sigma_0}(u, v) = \mathcal{L}_{\sigma_0}(v)(u). \end{aligned}$$

而且由 Lax-Milgram 定理以及 Riesz 表示定理, $\mathcal{L}_{\sigma_0} : W_0^{1,2} \rightarrow (W_0^{1,2})^*$ 线性, 有界且一一对应, 并且 $\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}$ 也是有界的, $D(\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}) = (W_0^{1,2})^*$. 因此以下 $W_0^{1,2}[0, l]$ 空间的算子方程是 Sturm-Liouville 问题 (4.4) 的弱形式

$$\mathcal{L}_{\sigma_0}v - \sigma_0E_1Ev = \lambda E_1Ev.$$

其中 $E : v \in W_0^{1,2}[0, l] \mapsto v \in L^2[0, l]$, $E_1 : w \in L^2[0, l] \mapsto w \in (W_0^{1,2}[0, l])^*$ 是嵌入映射。

同样我们可以考虑更一般的 Sturm-Liouville 问题:

$$\begin{cases} (p(x)v'(x))' - q(x)v(x) + \lambda r(x)v(x) = 0, & a < x < b \\ \alpha_1v'(a) - \beta_1v(a) = 0 \\ \alpha_2v'(b) + \beta_2v(b) = 0 \end{cases}$$

其中 $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ 满足条件: 存在 $p_0 \geq 0$, $r_0 > 0$, 使得 $p(x) \geq p_0$, $r(x) \geq r_0$, $q(x) \geq 0$.

记

$$L_{\sigma_0}v := (-1)(p(x)v'(x))' + q(x)v(x) + \sigma_0v(x),$$

则

$$(L_{\sigma_0} - \sigma_0)v = \lambda v.$$

可以证明以下算子方程是上述 Sturm-Liouville 问题的弱形式

$$\mathcal{L}_{\sigma_0}v - \sigma_0E_1Ev = \lambda E_1Ev,$$

其中 \mathcal{L}_{σ_0} 为 L_{σ_0} 在适当函数空间中的延拓。

命题 4.2. $\mathcal{L}_{\sigma_0} : W_0^{1,2} \rightarrow (W_0^{1,2})^*$ 线性, 有界且一一对应, 并且 $D(\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}) = (W_0^{1,2})^*$, $\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} : (W_0^{1,2})^* \rightarrow W_0^{1,2}$ 有界.

Rellich 定理. 嵌入映射 $E : v \in W_0^{1,2}[0, l] \mapsto v \in L^2[0, l]$ 是紧算子.

证明: Step 1. N 等分 $[0, l]$, ω_i 为第 i 等分.

$\forall x', x \in \omega_i$,

$$u(x') - u(x) = \int_x^{x'} u'(\bar{x}) d\bar{x}.$$

因此

$$\begin{aligned} u^2(x') - 2u(x')u(x) + u^2(x) &= \left(\int_x^{x'} u'(\bar{x}) d\bar{x} \right)^2 \\ &\leq |x' - x| \left(\int_x^{x'} |u'(\bar{x})|^2 d\bar{x} \right). \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} 2|\omega_i| \int_{\omega_i} u^2(x) dx - 2 \left(\int_{\omega_i} u(x) dx \right)^2 &\leq \left(\int_{\omega_i} dx' \int_{\omega_i} |x' - x| dx \right) \int_{\omega_i} |u'(x)|^2 dx \\ &\leq |\omega_i|^3 \int_{\omega_i} |u'(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

所以

$$\int_{\omega_i} u^2(x) dx \leq \frac{1}{|\omega_i|} \left(\int_{\omega_i} u(x) dx \right)^2 + \frac{|\omega_i|^2}{2} \int_{\omega_i} |u'(x)|^2 dx.$$

求和

$$\int_0^l u^2(x) dx \leq \sum_{i=1}^N \frac{1}{|\omega_i|} \left(\int_{\omega_i} u(x) dx \right)^2 + \frac{l^2}{2N^2} \int_0^l |u'(x)|^2 dx.$$

Step 2. 设 $\{u_k(x)\}_k \subset W_0^{1,2}[0, l]$ 中有界序列, 存在常数 M , 使得 $\|u_k\|_{W_0^{1,2}} \leq M$. 那么可以推出 $\{u_k\}_k$ 在 $L^2[0, l]$ 中有界. 因此, 存在 L^2 中 w -收敛的子

序列,不妨仍记为 $\{u_k\}_k$, 有

$$\begin{aligned} \int_0^l [u_k(x) - u_j(x)]^2 dx &\leq \sum_{i=1}^N \frac{1}{|\omega_i|} \left(\int_{\omega_i} [u_k(x) - u_j(x)] dx \right)^2 \\ &\quad + \frac{l^2}{2N^2} \int_0^l |u'_k(x) - u'_j(x)|^2 dx \\ &\leq \sum_{i=1}^N \frac{1}{|\omega_i|} \left(\int_{\omega_i} [u_k(x) - u_j(x)] dx \right)^2 \\ &\quad + \frac{2l^2 M^2}{N^2}. \end{aligned}$$

故对任意的 $\epsilon > 0$, 先选择 N_0 , 使得

$$\frac{2l^2}{N^2} M^2 < \frac{\epsilon}{2},$$

再选择 $K > 0$, 使得对任意的 $k, j > K$, 有

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{|\omega_i|} \left(\int_{\omega_i} [u_k - u_j] dx \right)^2 \leq \frac{N^2}{l} \left(\int_0^l [u_k - u_j] dx \right)^2 < \frac{\epsilon}{2}.$$

因此, $\{u_k\}_k$ 是 $L^2[0, l]$ 中的 Cauchy 序列, 故收敛.

所以, E 是紧算子.

Q.E.D.

因为对任意的 $w \in L^2$ 和任意的 $u \in W_0^{1,2}$, 记 $F_w(u) := \int_0^l w u dx$, 有

$$F_w(u) \leq \|w\|_{L^2} \|u\|_{W_0^{1,2}}.$$

所以有

命题 4.3. 嵌入映射 $E_1 : w \in L^2 \mapsto w (= F_w) \in (W_0^{1,2})^*$ 连续.

推论 4.4. $\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} E_1 E : W_0^{1,2} \rightarrow W_0^{1,2}$ 是紧算子.

定理 4.5. (i) 算子 $L_{\sigma_0} - \sigma_0$ 的特征值为非负实数, 特征值序列 $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ 仅可能以 ∞ 为聚点, 当 $\beta_1 + \beta_2 > 0$ 时, $\lambda_1 > 0$;

(ii) 设 $\forall \lambda_n \neq \lambda_m$, 相应的特征函数为 $X_n(x)$, $X_m(x)$, 那么 X_n 与 X_m 正交,

即

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx = 0,$$

且 $\{X_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 是 $L^2[0, l]$ 中完备的直交系. 令

$$C_n = \frac{\int_0^l f(x)X_n(x)dx}{\|X_n(x)\|_{L^2[0,l]}^2}, \quad \forall f \in L^2[0, l],$$

那么

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - \sum_{n=1}^N C_n X_n(x)\|_{L^2[0,l]} = 0.$$

证明: 以下仅考虑 Sturm-Liouville 问题 (4.2), 可以推广到一般问题。

Step 1. 证明 λ 非负. 以 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \beta_1 = \beta_2 = 1$ 为例. 因为

$$\lambda X = (L_{\sigma_0} - \sigma_0)X = -X'',$$

所以

$$\lambda \int_0^l (X(x))^2 dx = - \int_0^l X''(x)X(x)dx = \int_0^l (X'(x))^2 dx.$$

若 $\lambda = 0$, 则 $X'(x) \equiv 0, X(x) \equiv 0$. 因此, $\lambda > 0$.

Step 2. 现在考虑更一般的特征值问题

$$\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} E_1 E v = \mu v.$$

由推论 4.4, $\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} E_1 E$ 是紧算子. 由泛函分析 Riesz-Schauder 理论知: 紧算子的特征值 $\{\mu_n\}_n$ 至多是可数集且仅可能以零为聚点, 并且对应不同特征值的特征函数正交. 若

$$\mu_n X_n = (\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} E_1 E) X_n,$$

由

$$\mu_n \|X_n\|_{L^2[0,l]}^2 = (\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} E_1 E(X_n))(X_n) = \mathcal{H}_{\sigma_0}(X_n, X_n) \geq C_0 \|X_n\|_{W_0^{1,2}[0,l]},$$

以及关于 X'_n 的类似估计 (只要将特征方程关于 x 求导数), 若 X_n 是 $\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}E_1E$ 的特征函数, 则 $X_n \in W_0^{1,2}[0, l]$ 且 $X_n'' \in L^2[0, l]$, 因此也是算子 L_{σ_0} 的特征函数. 当 $\mu_n \neq 0$ 时, 有

$$L_{\sigma_0}X_n = \frac{1}{\mu_n}X_n = (\lambda_n + \sigma_0)X_n,$$

所以 λ_n 仅可能以无穷为聚点. Q.E.D

例1. 考虑下述波动方程的混合问题.

$$\begin{cases} \partial_{tt}u = a^2\partial_{xx}^2u, & \forall x \in (0, l), \forall t > 0, \\ (-1)\partial_x u + \alpha_1 u = 0, & x = 0, t > 0, \\ \partial_x u + \alpha_2 u = 0, & x = l, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & \forall x \in (0, l), \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & \forall x \in (0, l). \end{cases}$$

解: Step 1. 令 $u(x, t) = X(x)T(t)$, 代入方程定出 $X(x)$ 所适合的特征值问题以及 $T(t)$ 适合的常微分方程分别为

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < l, \\ X'(0) - \alpha_1 X(0) = 0, \\ X'(l) + \alpha_2 X(l) = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

和

$$T'' + a^2\lambda T = 0, \quad \forall t > 0. \quad (4.6)$$

Step 2. 求解特征值问题 (4.5). 首先由定理 4.2 知特征值 $\lambda > 0$, 于是令 $\lambda = \beta^2 (\beta > 0)$, 则常微分方程 (4.5) 的通解为

$$X(x) = C \cos \beta x + D \sin \beta x, \quad (4.7)$$

再由边界条件知常数 C, D 满足条件

$$\begin{cases} -\alpha_1 C + \beta D = 0, \\ (\alpha_2 \cos \beta l - \beta \sin \beta l)C + (\beta \cos \beta l + \alpha_2 \sin \beta l)D = 0. \end{cases}$$

消去 D , 得到

$$[\beta(\alpha_2 \cos \beta l - \beta \sin \beta l) + \alpha_1(\beta \cos \beta l + \alpha_2 \sin \beta l)]C = 0.$$

为了使 $C \neq 0$, 即为了得到非平凡解, 令

$$\beta(\alpha_2 \cos \beta l - \beta \sin \beta l) + \alpha_1(\beta \cos \beta l + \alpha_2 \sin \beta l) = 0. \quad (4.8)$$

如果 $\cos \beta l = 0$, 则 $\beta = (k\pi + \frac{\pi}{2})/l, k = 0, 1, 2, \dots$. 将 $\cos \beta l = 0$ 代入 (4.8) 得到 $\beta = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$ (此时将不会有形如 (4.7) 的无穷多特征函数序列), 于是我们假定

$$\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \neq \frac{k\pi + \frac{\pi}{2}}{l}, k = 0, 1, 2, \dots,$$

得到 $\cos \beta l \neq 0$, 在 (4.8) 两边同除 $\cos \beta l$, 则有

$$\tan \beta l = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\beta}{\beta^2 - \alpha_1 \alpha_2}.$$

该方程有无穷多个正根 $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$, 令 $\lambda_n = \beta_n^2$, 则

$$(n-1)^2 \frac{\pi^2}{l^2} < \lambda_n < n^2 \frac{\pi^2}{l^2}.$$

由 (4.7) 有特征值问题解序列 (其中令 $D = C\alpha_1/\beta_n$)

$$X_n(x) = \cos \beta_n x + \frac{\alpha_1}{\beta_n} \sin \beta_n x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

由 (4.6) 有对应的特征值问题解序列

$$T_n(t) = A_n \sin(a\beta_n t) + B_n \cos(a\beta_n t), \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ Q.E.D.}$$

现在我们来考虑具有如下形式的非齐次波动方程的混合问题.

$$\begin{cases} \partial_{tt}v = a^2\partial_{xx}v + \bar{f}(x, t), & \forall x \in (0, l), \forall t > 0, \\ v(0, t) = g_1(t), & \forall t > 0, \\ v(l, t) = g_2(t), & \forall t > 0, \\ v(x, 0) = \bar{\varphi}(x), & \forall x \in (0, l), \\ \partial_t v(x, 0) = \bar{\psi}(x). & \forall x \in (0, l). \end{cases}$$

对于这类问题, 由于它的边界条件非齐次. 令

$$u(x, t) = v(x, t) - \frac{x}{l}g_2(t) - \frac{l-x}{l}g_1(t),$$

于是化成如下关于 u 的边界条件齐次的方程

$$\begin{cases} \partial_{tt}u = a^2\partial_{xx}u + f(x, t), & \forall x \in (0, l), \forall t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & \forall x \in (0, l), \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & \forall x \in (0, l). \end{cases} \quad (4.9)$$

对这类问题有两种解法, 其中一种是齐次化原理. 本书不给出详细的讨论, 读者可参阅 [4]. 第二种方法是 Fourier 解法. 下面给出它的主要思路.

令

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad (\text{满足边界条件}).$$

设 $f, \varphi, \psi \in L^2[0, l]$. 因为 $\{\sin \frac{n\pi}{l}x\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^2[0, l]$ 中完备, 作展开

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l}x, \\ \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l}x, \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{n\pi}{l}x. \end{aligned}$$

把上面各式代入 (4.9) 有

$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(0) = \varphi_n, \\ T_n'(0) = \psi_n. \end{cases}$$

由此可以解得

$$T_n(t) = \varphi_n \cos \frac{an\pi}{l}t + \frac{1}{an\pi} \psi_n \sin \frac{an\pi}{l}t + \frac{1}{an\pi} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{an\pi}{l}(t - \tau) d\tau.$$

第 7 章

二阶线性抛物型方程

7.1 极值原理

7.1.1 极值原理

考虑 $Lu := u_t - a^2 u_{xx}$ 在区域 $Q_T := \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ 上的求解问题, 该区域的边界为

$$\Gamma_T := \{(x, 0) : 0 \leq x \leq l\} \cup \{(0, t) : 0 \leq t \leq T\} \cup \{(l, t) : 0 \leq t \leq T\}.$$

弱极值原理: 设 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ 在 Q_T 内满足 $Lu \leq 0$ (或 ≥ 0). 则有

$$\max_{\bar{Q}_T} u = \max_{\Gamma_T} u \quad (\text{或 } \min_{\bar{Q}_T} u = \min_{\Gamma_T} u).$$

证明: Step 1. 若在 Q_T 内 $Lu < 0$, 则 u 不能在 Q_T 内达到最大值. 如若不然, 设 u 在 $(x_0, t_0) \in Q_T$ 处达到最大值, 则

$$\begin{cases} \partial_t u(x_0, t_0) = 0, & t_0 < T \text{ 时}, \\ \partial_t u(x_0, t_0) \geq 0, & t_0 = T \text{ 时}, \\ \partial_x u(x_0, t_0) = 0, \\ \partial_{xx} u(x_0, t_0) \leq 0. \end{cases}$$

由此可以得到

$$\partial_t u(x_0, t_0) - a^2 \partial_{xx} u(x_0, t_0) \geq 0.$$

这与在 Q_T 内 $Lu < 0$ 矛盾.

Step 2. 对任意的 $\epsilon > 0$, 令

$$v_\epsilon(x, t) = u(x, t) - \epsilon t,$$

则在 Q_T 内 $Lv_\epsilon = Lu - \epsilon < 0$. 由 Step 1 知,

$$\max_{\bar{Q}_T} u - \epsilon T \leq \max_{\bar{Q}_T} v_\epsilon = \max_{\Gamma_T} v_\epsilon \leq \max_{\Gamma_T} u + \epsilon T$$

令 $\epsilon \rightarrow 0$, 得到

$$\max_{\bar{Q}_T} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

Step 3. 若在 Q_T 内 $Lu \geq 0$. 令 $v = -u$, 则在 Q_T 内 $Lv = -Lu \leq 0$.

由 Step 2 的结果可以证明

$$\min_{\bar{Q}_T} u = \min_{\Gamma_T} u. \quad \text{Q.E.D}$$

比较原理: 设 $u, v \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ 在 Q_T 内满足 $Lu \leq Lv$. 若在 Γ_T 上有 $u \leq v$, 则在 \bar{Q}_T 上 $u \leq v$.

证明: 因为

$$\begin{cases} L(u - v) \leq 0, & \text{in } Q_T, \\ (u - v) \leq 0, & \text{on } \Gamma_T. \end{cases}$$

所以由弱极值原理, 在 \bar{Q}_T 上, 有

$$u - v \leq 0. \quad \text{Q.E.D}$$

7.1.2 第一初边值问题解的上、下界估计

$$\begin{cases} Lu := u_t - a^2 u_{xx} = f, & (x, t) \in Q_T = (0, l) \times (0, T], \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = g_1(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(l, t) = g_2(t), & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (4.1)$$

记

$$F := \sup_{Q_T} |f|, \quad B := \max\left\{ \sup_{0 \leq x \leq l} |\varphi|, \sup_{0 \leq t \leq T} |g_1|, \sup_{0 \leq t \leq T} |g_2| \right\},$$

令

$$W_+(x, t) = Ft + B, \quad W_-(x, t) = -Ft - B,$$

则

$$\begin{cases} LW_+ = F \geq Lu \geq -F = LW_-, & \text{on } Q_T, \\ W_+ \geq u \geq W_-, & \text{on } \Gamma_T. \end{cases}$$

利用比较原理, 在 \bar{Q}_T 上有 $W_+ \geq u \geq W_-$.

命题 4.1. 设 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ 为 (4.1) 的解, 则

$$\max_{\bar{Q}_T} |u(x, t)| \leq FT + B.$$

7.1.3 第二、第三初边值问题解的上、下界估计

考虑第三类初边值问题

$$\begin{cases} Lu := u_t - a^2 u_{xx} = f, & \forall (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & \forall x \in (0, l), \\ -\partial_x u(0, t) + \alpha(t)u(0, t) = g_1(t), & \forall t \in (0, T], \\ \partial_x u(l, t) + \beta(t)u(l, t) = g_2(t), & \forall t \in (0, T]. \end{cases} \quad (4.2)$$

其中 $\alpha(t) \geq 0, \beta(t) \geq 0$. 当 $\alpha(t) = \beta(t) \equiv 0$ 时, (4.2) 为第二初边值问题.

命题 4.2. 若

$$\begin{cases} Lu \geq 0, & \forall (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) \geq 0, & \forall x \in (0, l), \\ -\partial_x u(0, t) + \alpha(t)u(0, t) \geq 0, & \forall t \in (0, T], \\ \partial_x u(l, t) + \beta(t)u(l, t) \geq 0, & \forall t \in (0, T]. \end{cases}$$

的解 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, 则在 \bar{Q}_T 上有 $u \geq 0$.

证明: Step 1. 首先假设边界条件中等号处处不成立. 由弱极值原理, 有

$$\min_{\bar{Q}_T} u = \min_{\Gamma_T} u.$$

设 u 在 $(x_0, t_0) \in \Gamma$ 处达到最小值. 若 $u(x_0, t_0) < 0$, 则只可能是 $x_0 = 0$ 或 $x_0 = l$, $0 \leq t_0 \leq T$.

当 $x_0 = 0$ 时, 由于 u 在 (x_0, t_0) 处达到最小值, 有

$$-\partial_x u(0, t_0) + \alpha(t_0)u(0, t_0) \leq 0,$$

这与 $x = 0$ 处的边值条件矛盾.

当 $x_0 = l$ 时, 由于 u 在 (x_0, t_0) 处达到最小值, 有

$$\partial_x u(l, t_0) + \beta(t_0)u(l, t_0) \leq 0,$$

这与 $x = l$ 处的边界条件矛盾.

Step 2. 对任意的 $\epsilon > 0$, 令 $v_\epsilon(x, t) = u(x, t) + \epsilon[2a^2t + (x - \frac{l}{2})^2]$, 则

$$\begin{cases} Lv_\epsilon = Lu \geq 0, & \forall (x, t) \in Q_T, \\ v_\epsilon(x, 0) \geq u(x, 0) \geq 0, & \forall x \in (0, l), \\ -\partial_x v_\epsilon(0, t) + \alpha v_\epsilon(0, t) = \\ -\partial_x u(0, t) + \alpha u(0, t) + 2\epsilon(\frac{l}{2}) + \alpha\epsilon[2a^2t + (\frac{l}{2})^2] > 0, \forall t \in (0, T], \\ \partial_x v_\epsilon(l, t) + \beta v_\epsilon(l, t) = \\ \partial_x u(l, t) + \beta u(l, t) + 2\epsilon(\frac{l}{2}) + \beta\epsilon[2a^2t + (\frac{l}{2})^2] > 0, \forall t \in (0, T]. \end{cases}$$

由 Step 1 可知在 \bar{Q}_T 上 $v_\epsilon \geq 0$. 令 $\epsilon \rightarrow 0$, 则在 \bar{Q}_T 上 $u \geq 0$. Q.E.D
记

$$F := \sup_{Q_T} |f|, \quad B := \max\{\sup |\varphi|, \sup |g_1|, \sup |g_2|\},$$

令

$$W_\pm(x, t) = \pm Ft \pm B\{1 + \frac{1}{l}[2a^2t + (x - \frac{l}{2})^2]\},$$

那么

$$\begin{aligned} \partial_t W_+ &= F + \frac{B}{l} 2a^2, \\ \partial_x W_+ &= \frac{2B}{l} \left(x - \frac{l}{2}\right), \end{aligned}$$

因此

$$\begin{cases} LW_+ = F \geq Lu, & \forall (x, t) \in Q_T, \\ W_+(x, 0) \geq B \geq u(x, t), & \forall x \in (0, l), \\ -\partial_x W_+(0, t) + \alpha W_+(0, t) \geq B \geq -\partial_x u(0, t) + \alpha u(0, t), & \forall t \in (0, T], \\ -\partial_x W_+(l, t) + \alpha W_+(l, t) \geq B \geq \partial_x u(l, t) + \beta u(l, t), & \forall t \in (0, T]. \end{cases}$$

由命题 4.2 可以知道在 \bar{Q}_T 上有

$$W_+ - u \geq 0, \quad u - W_- \geq 0.$$

命题 4.3. 若 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ 为 (4.2) 的解, 则存在常数 C , 使得

$$\max_{\bar{Q}_T} |u(x, t)| \leq FT + CB.$$

初边值问题解的唯一性定理: (4.1) 和 (4.2) 在 $C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ 中的解唯一.

证明: 由命题 4.1 和命题 4.2 可知, 当 $f \equiv \varphi \equiv g_1 \equiv g_2$ 时, $u \equiv 0$. 故若有 u, v 同时为 (4.1) 和 (4.2) 的解, 则有 $u - v \equiv 0$. Q.E.D

7.1.4 Cauchy 问题解的上、下界估计

考虑热方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f, & \forall (x, t) \in Q_T := \mathbb{R} \times (0, T], \\ u(x, 0) = \varphi(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.3)$$

命题 4.4. 若 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ 为 (4.3) 的有界解, 则

$$\sup_{Q_T} |u| \leq T \sup_{Q_T} |f| + \sup_{\mathbb{R}} |\varphi|.$$

证明方法与命题 (4.1) 和命题 (4.3) 类似.

7.2 能量不等式

热传导方程初边值问题的能量不等式 设 $u \in C^{1,0}(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$, 其中 $Q_T = (0, l) \times (0, T]$. 将 (3.4) 的第一式两边乘以 $u(x, \tau)$, 并在 Q_t 上积分, 得到

$$\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l \frac{\partial u^2(x, \tau)}{\partial \tau} dx d\tau - a^2 \int_0^t \int_0^l u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx d\tau = \int_0^t \int_0^l f u dx d\tau.$$

因为对任意的 $t > 0$, $u(0, t) = u(l, t) \equiv 0$, 故

$$\text{左边} = \frac{1}{2} \int_0^l u^2(x, t) dx + a^2 \int_0^t \int_0^l \left(\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 dx d\tau - \frac{1}{2} \int_0^l u^2(x, 0) dx.$$

又因为

$$\text{右边} \leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l u^2(x, \tau) dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l f^2(x, \tau) dx d\tau,$$

于是可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l u^2(x, t) dx + a^2 \int_0^t \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx d\tau \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l u^2(x, \tau) dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^l \varphi(x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l f^2(x, \tau) dx d\tau. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \Omega(t) & := \int_0^t \int_0^l u^2(x, \tau) dx d\tau, \\ F(t) & := \int_0^l \varphi(x)^2 dx + \int_0^t \int_0^l f^2 dx d\tau, \end{aligned}$$

则有

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} := \int_0^l u^2(x, t) dx, \quad \Omega(0) = 0.$$

利用 Gronwall 不等式, 可以得到

$$\Omega(t) \leq e^t F(t).$$

因此对任意的 $t \in [0, T]$, 有

$$\frac{1}{2} \int_0^l u^2(x, t) dx + a^2 \int_0^t \int_0^l \left(\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 dx d\tau$$

$$\leq \frac{1+e^t}{2} \left[\int_0^l \varphi^2(x) dx + \int_0^t \int_0^l f^2(x, \tau) dx d\tau \right].$$

所以我们得到热方程初边值问题 (3.4) 的能量不等式

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{1}{2} \int_0^l u^2(x, t) dx + a^2 \int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 dx d\tau \\ & \leq \frac{1+e^T}{2} \left[\int_0^l \varphi^2(x) dx + \int_0^T \int_0^l f^2(x, \tau) dx d\tau \right]. \quad (3.7) \end{aligned}$$

推论: (3.4) 在空间 $L^\infty([0, T]; L^2[0, l]) \cap L^2([0, T]; H^1[0, l])$ 中的解的如果存在, 则一定是唯一的.

7.3 解的存在性与唯一性

第 8 章

二阶线性双曲型方程

8.0.1 能量不等式 2

由 (4.9) $\times \partial_t u$, 再在 $Q_\tau = (0, l) \times (0, \tau)$ 上积分, 我们有

$$\int \int_{Q_\tau} u_t(u_{tt} - a^2 u_{xx}) dx dt = \int \int_{Q_\tau} u_t f dx dt.$$

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \int \int_{Q_\tau} \left\{ \partial_t \left[\frac{1}{2} (u_t)^2 + \frac{1}{2} a^2 (u_x)^2 \right] - \partial_x [a^2 u_t u_x] \right\} dx dt \quad (\text{由 Green 公式}) \\ &= (-1) \int_{\partial Q_\tau} \left[\frac{1}{2} (u_t)^2 + \frac{a^2}{2} (u_x)^2 \right] dx + [a^2 u_t u_x] dt \\ &= (-1) \left\{ \int_{\vec{0}\vec{l}} + \int_{\Gamma_l} + \int_{\vec{l}\vec{0}} + \int_{\Gamma_0} \right\} \quad (\text{由边界条件 } u_t(0, t) = u_t(l, t) = 0) \\ &= \int_0^l \left[\frac{1}{2} u_t^2(x, \tau) + \frac{a^2}{2} u_x^2(x, \tau) \right] dx - \int_0^l \left[\frac{1}{2} u_t^2(x, 0) + \frac{a^2}{2} u_x^2(x, 0) \right] dx, \\ \text{右边} &\leq \frac{1}{2} \int \int_{Q_\tau} u_t^2 dx dt + \frac{1}{2} \int \int_{Q_\tau} f^2 dx dt. \end{aligned}$$

令

$$G(\tau) = \int_0^\tau dt \int_0^l (u_t^2 + a^2 u_x^2) dx,$$

$$F(\tau) = \int \int_{Q_\tau} f^2 dx dt + \int_0^l [\psi^2 + (\partial_x \varphi)^2] dx.$$

那么

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leq G(\tau) + F(\tau).$$

由 Gronwall 不等式, 可以得到能量不等式. $\forall \tau \in [0, T]$, 存在 $M = M(T)$, 使得

$$\begin{aligned} & \int_0^l [u_t^2(x, \tau) + a^2 u_x^2(x, \tau)] dx \\ & \leq M \left\{ \int_0^l [\psi^2 + a^2 (\partial_x \varphi)^2] dx + \int \int_{Q_\tau} f^2 dx dt \right\}, \quad (4.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int \int_{Q_\tau} [u_t^2(x, t) + a^2 u_x^2(x, t)] dx dt \\ & \leq M \left\{ \int_0^l [\psi^2 + a^2 (\partial_x \varphi)^2] dx + \int \int_{Q_\tau} f^2 dx dt \right\}. \quad (4.11) \end{aligned}$$

有了能量模估计, 事实上就有了解 u 本身的 L^2 范数估计, 可以得到 $\forall \tau \in [0, T]$, 存在 $M = M(T)$, 使得

$$\begin{aligned} & \int \int_{Q_\tau} (u^2 + u_t^2 + a^2 u_x^2) dx dt \\ & \leq M \left[\int_0^l (\varphi^2 + \psi^2 + a^2 (\partial_x \varphi)^2) dx + \int \int_{Q_\tau} f^2 dx dt \right]. \quad (4.12) \end{aligned}$$

证明: $\forall \tau \in [0, t_0]$,

$$\begin{aligned} & \int_0^l [u^2(x, \tau) - u^2(x, 0)] dx \\ & = \int_0^\tau \frac{d}{dt} \left[\int_0^l u^2(x, t) dx \right] dt \\ & = \int_0^\tau \int_0^l 2u(x, t) u_t(x, t) dx dt \\ & \leq \int \int_{Q_\tau} u^2(x, t) dx dt + \int \int_{Q_\tau} u_t^2(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

令

$$G(\tau) = \int \int_{Q_\tau} u^2(x, t) dx dt,$$

则 $G(0) = 0$, 且

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leq G(\tau) + F(\tau),$$

其中

$$F(\tau) = \int_0^l \varphi^2 dx + \int \int_{Q_\tau} u_t^2 dx dt.$$

由 Gronwall 不等式, 得到

$$\begin{aligned} \int_0^l u^2(x, \tau) dx &\leq e^{t_0} \left(\int_0^l \varphi^2 dx + \int \int_{Q_\tau} u_t^2 dx dt \right), \\ \int \int_{Q_\tau} u^2(x, t) dx dt &\leq e^{t_0} \left(\int_0^l \varphi^2 dx + \int \int_{Q_\tau} u_t^2 dx dt \right). \end{aligned}$$

再将 (4.11) 中的估计式代入, 并相加即得所需结论. 由此可以证明边值问题 (4.9) 的解的唯一性, 以及解对 φ, ψ, f 的连续依赖性.

8.1 解的存在性与唯一性

参考文献

- [1] 董光昌, 线性二阶偏微分方程, 浙江大学出版社, (1987).
- [2] 管志成, 李俊杰, 常微分方程与偏微分方程, 浙江大学出版社, (2001).
- [3] 胡海昌, 弹性力学的变分原理及其应用, 科学出版社, (1981).
- [4] 姜礼尚, 陈亚浙, 刘西垣, 易法槐, 数学物理方法, 高等教育出版社, (1996).
- [5] 潘祖梁, 陈仲慈, 工程技术中的偏微分方程, 浙江大学出版社, (1996).
- [6] R. Courant, D. Hilbert, 数学物理方法 (I) (II), 科学出版社 (1981).
- [7] L.C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, 19, American Mathematical Society, Providence, RI (1998).
- [8] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer(1983).
- [9] F. John, Partial Differential Equations, Springer-Verlag, (1982).
- [10] O.A. Ladyzhenskaya, The Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Springer-Verlag(1985).
- [11] K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag, (1978).