

偏微分方程讲义

张振宇

目录

第一章 偏微分方程的定解问题	1
§1.1 引言	1
1.1.1 偏微分方程的含义	1
1.1.2 偏微分方程的一些基本概念	1
§1.2 弦的微小横振动	2
1.2.1 弦的微小横振动的定义	2
1.2.2 弦的微小横振动方程的导出	2
1.2.3 弦振动方程的定解条件	4
1.2.4 混合问题和Cauchy问题	6
1.2.5 高维波动方程	6
1.2.6 边值问题	7
习题1.2	8
§1.3 热传导方程及其定解条件	9
1.3.1 有关场论的一些知识(复习)	9
1.3.2 热传导方程	10
1.3.3 热传导问题的定解条件	12
1.3.4 Cauchy问题	13
1.3.5 稳定温度场问题	13
1.3.6 低维热传导问题	14
1.3.7 非线性偏微分方程和非线性偏微分方程组	14
习题1.3	14
§1.4 二阶线性偏微分方程的分类和化简	15
1.4.1 两个自变量的二阶线性偏微分方程的化简	15
1.4.2 两个自变量二阶线性偏微分方程的分类	23
1.4.3 多个自变量的二阶线性偏微分方程的分类	24
1.4.4 多个自变量二阶线性偏微分方程的化简	25
习题1.4	28
§1.5 线性偏微分方程的叠加原理, 定解问题的适定性	29
1.5.1 叠加原理	29

1.5.2	定解问题的适定性	31
第二章	行波法、波动方程Cauchy问题的解	33
§2.1	一维波动方程的Cauchy问题	33
2.1.1	一维无界弦的自由振动问题, d'Alembert公式和d'Alembert解法	33
2.1.2	无界弦的强迫振动, 齐次化原理	39
习题2.1		44
§2.2	高维波动方程Cauchy问题的解	45
2.2.1	三维波动方程Cauchy问题的解	45
2.2.2	二维波动方程Cauchy问题的解	47
习题2.2		48
第三章	分离变量法, 微分方程的特征值和特征函数	49
§3.1	齐次线性方程, 齐次边界条件问题的分离变量解法	49
3.1.1	有界弦的自由振动, 分离变量法	49
3.1.2	其他定解问题的分离变量法	56
习题3.1		59
§3.2	非齐次方程问题的解法	60
3.2.1	有界弦的强迫振动, 特征函数展开法	60
3.2.2	一维非齐次热传导方程混合问题的解法	64
3.2.3	Poisson方程边值问题的解法	65
习题3.2		68
§3.3	非齐次边界条件问题的解法	69
3.3.1	边界条件的齐次化	69
3.3.2	方程和边界条件同时齐次化的方法	70
习题3.3		72
§3.4	直角坐标系下高维问题的分离变量解法	73
3.4.1	齐次方程齐次边界条件问题	73
3.4.2	非齐次方程齐次边界条件问题的解法	76
3.4.3	非齐次边界条件问题的解	77
习题3.4		79
§3.5	极坐标系下的分离变量法	79
3.5.1	由射线和圆弧所界定区域中问题的解法	79
3.5.2	周期边界条件问题的解法	83
习题3.5		86
§3.6	高维曲线坐标系下的分离变量法、球函数和柱函数	86
3.6.1	Bessel方程和Legendre方程的导出	86
3.6.2	二阶线性齐次常微分方程的级数解法	89

3.6.3	Legendre方程的级数解、Legendre多项式	92
3.6.4	Bessel方程的级数解、Bessel函数	94
3.6.5	圆盘中热传导方程的解	100
	习题3.6	101
§3.7	常微分方程的特征值问题、分离变量法的理论基础	102
3.7.1	Sturm-Liouville问题	102
3.7.2	Sturm-Liouville问题解的性质	102
第四章	积分变换法	106
§4.1	Fourier变换法	106
4.1.1	Fourier变换的定义	106
4.1.2	Fourier变换的性质	108
4.1.3	多元函数的Fourier变换	112
4.1.4	函数Fourier变换的例子	113
4.1.5	用Fourier变换法求解偏微分方程的定解问题	114
	习题4.1	120
§4.2	Laplace变换法	120
4.2.1	Laplace变换和逆变换的定义	120
4.2.2	Laplace变换的性质	121
4.2.3	函数Laplace变换的例子	125
4.2.4	Laplace逆变换的求法	126
4.2.5	用Laplace变换法求解偏微分方程的定解问题	126
	习题4.2	128
第五章	位势方程的基本解和Green函数解法，三类方程总结	129
第六章	两个自变量的一阶偏微分方程组（略）	130

第一章 偏微分方程的定解问题

§1.1 引言

1.1.1 偏微分方程的含义

数学物理方程是自然现象或社会现象规律的数学描述，它包括代数方程（如气体动力学的状态方程）、常微分方程、偏微分方程、积分方程、微分-积分方程等。

本课程主要研究三类典型的偏微分方程——波动方程、热传导方程、位势方程——定解问题的导出及其求解方法。一方面是因为这三类方程描述了大量的物理现象，求解他们可以解决许多工程实际问题；另一方面是因为它们既比较简单，容易入手，同时又是研究其他更复杂的偏微分方程的基础。

1.1.2 偏微分方程的一些基本概念

设未知数的自变量不止一个。称含有未知数偏导数的方程为偏微分方程。方程中涉及到的偏导数的最高阶数成为该偏微分方程的阶数。若偏微分方程关于方程中所出现的未知函数及其各阶偏导数都是线性的（一次的），则称此偏微分方程是线性的。例如

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = f(x, y)$$

就是一个三阶线性偏微分方程。线性偏微分方程中不含未知函数及其导数的项 $f(x, y)$ 称为自由项。自由项为零的线性偏微分方程称为齐次线性偏微分方程。

称不是线性的偏微分方程为非线性偏微分方程。若非线性偏微分方程关于其最高阶偏导数是线性的，则称它是拟线性偏微分方程。例如

$$a \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(u) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

就是一个二阶拟线性偏微分方程，但非线性偏微分方程

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 = u$$

则不是拟线性的。

若某函数具有偏微分方程中所出现的各阶连续偏导数，且代入方程后成为一个恒等式，则称此函数为该偏微分方程的一个解（古典解）。一般情况下，偏微分方程的解有无穷多个，只有当解满足一定的初始条件和边界条件（总称为定解条件）时，它才是唯一的。称满足定解条件的偏微分方程的求解问题为定解问题。实际问题中，我们总是在一定的定解条件下求解偏微分方程的定解问题。

§1.2 弦的微小横振动

偏微分方程定解问题的导出方法有两种。一种方法是变分法。另一种方法是基于自然界三大守恒定律（质量守恒、动量守恒、能量守恒）的推导方法。第二种方法更具有普遍性，但用这种方法导出的方程往往不封闭（即未知函数的个数大于方程的个数），要使方程封闭，往往需要补充针对具体问题用实验方法导出的经验方程。本课程主要用第二种方法推导偏微分方程的定解问题。作为例子，首先导出弦的微小横振动方程及其定解问题。

1.2.1 弦的微小横振动的定义

所谓弦，指的是一根弹性的细线，它对弯曲变形不产生任何抵抗力，仅当其长度发生变化时，才会产生弹性恢复力（张力）。弦的横振动是指弦上各质点的位移都发生在同一平面内，且位移都与弦线平衡位置所在的直线垂直。

设一根张紧的弦，其长度为 l ，由于某外界的作用，它在其平衡位置附近作横振动。将其平衡位置取为 x 轴，其一端取为坐标原点，其横振动所在平面取为 $x-u$ 平面，其中 $u = u(x, t)$ 为弦上任一点 x 在时刻 t 的位移。弦的微小横振动是指 $|u|, \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|, \dots \ll 1$ 。

1.2.2 弦的微小横振动方程的导出

设弦的线密度为 ρ 。由于弦作横振动，故 ρ 与 t 无关，仅是 x 的函数： $\rho = \rho(x)$ 。又设弦在水平方向不受外力作用，在垂直方向上受外力作用，且记平衡位置时单位长度上所受外力为 $F(x, t)$ 。此外，弦上还有一种抵抗长度变化的内力——张力。如图1.1所

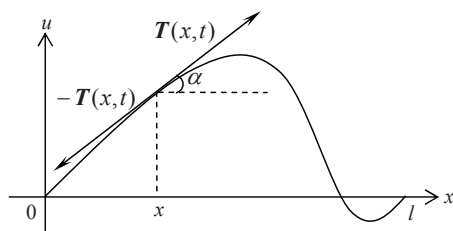


图 1.1: 弦线的张力

示, 记弦上任一点 x 处, 在 t 时刻左边部分受右边部分的作用力为张力 $\mathbf{T}(x, t)$, 其大小为 $T(x, t)$, 方向为弦在那点的切线方向 (因弦对弯曲变形无抵抗力), 则左边部分对右边部分的作用力为 $-\mathbf{T}(x, t)$ 。张力 $\mathbf{T}(x, t)$ 的水平分量和垂直分量分别为 $T \cos \alpha$ 和 $T \sin \alpha$, 其中 α 为 \mathbf{T} 与 x 轴正向的夹角, 满足 $\tan \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$ 。利用弦的微小振动的假设, 略去高一阶的小量, 可得

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} = \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \dots \approx 1$$

$$\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

如图1.2所示, 考虑弦在振动过程中的某一段 $[x_1, x_2]$ 。这时, 对于弦段 $[x_1, x_2]$ 来说, 右端点处 右边部分对左边部分的作用力 $\mathbf{T}(x_2, t)$ 以及左端点处左边部分对右边部分的作用

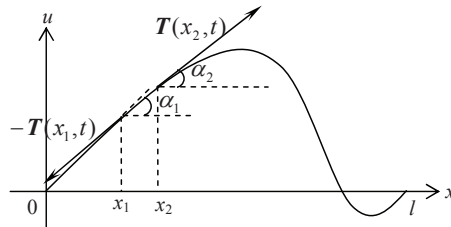


图 1.2: 弦段所受张力

力 $-\mathbf{T}(x_1, t)$ 都成了外力。研究弦段 $[x_1, x_2]$ 在水平方向力的平衡:

$$T(x_2, t) \cos \alpha_2 + [-T(x_1, t) \cos \alpha_1] = 0$$

由于 $\cos \alpha_1 \approx 1$, $\cos \alpha_2 \approx 1$, 由上式得

$$T(x_1, t) = T(x_2, t) = T(t)$$

又由于弦的微小振动, $|u|, \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$, 在振动过程中, 弦的长度变化很小, 弦在振动过程中的张力 $T(t)$ 可近似取为平衡位置时张紧弦的张力 $T = T(0)$ 。

现研究弦段 $[x_1, x_2]$ 在 $[t_1, t_2]$ 时段内沿垂直方向的动量守恒。注意到垂直方向的位移为 $u(x, t)$, 故速度在垂直方向的分量为 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 。于是, 弦段在 $[t_1, t_2]$ 时段内沿垂直方向动量的增量为

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_2} dx - \int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_1} dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_2} - \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_1} \right) dx$$

在 $[t_1, t_2]$ 时段内, 弦段所受外力在垂直方向的冲量为

$$\int_{t_1}^{t_2} T \sin \alpha \Big|_{x=x_2} dt + \int_{t_1}^{t_2} (-T \sin \alpha) \Big|_{x=x_1} dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt$$

由动量守恒定律——动量的增量=外力的冲量，得

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho \left(\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_2} - \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_1} \right) dx = \int_{t_1}^{t_2} T \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_2} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_1} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt \quad (1.1)$$

(1.1)式称为弦振动问题动量守恒的宏观表达式，此式只要求未知函数 $u(x, t)$ 的一阶偏导数可积就可以了。若未知函数 $u(x, t)$ 充分光滑，则(1.1)可以写成

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) \right] dx dt$$

由 $[t_1, t_2]$ 、 $[x_1, x_2]$ 的任意性，得弦振动方程

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) \quad (1.2)$$

设弦线均匀，则 ρ =常数，又记单位质量弦线所受外力（加速度量纲）为 $f(x, t) = F(x, t)/\rho$ ，并记 $a = \sqrt{T/\rho}$ ，则得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (1.3)$$

当弦垂直方向不受外力作用，即 $f = 0$ 时，对应的振动称为自由振动。相应的， $f \neq 0$ 时的振动称为强迫振动。

由于物理问题仅要求 u 满足宏观守恒律(1.1)即可，方程(1.2)是我们在数学上加了光滑性条件得到的，这种光滑性并不是物理上的要求。于是我们称对任意的 $[x_1, x_2]$ 和 $[t_1, t_2]$ ，(1.1)式都能满足的函数 $u = u(x, t)$ 为方程(1.2)的广义解，它只要求 u 的一阶偏导数可积就可以了。广义解是一个完全具有物理意义的解。

方程(1.3)除可描述弦的微小横振动外，还可以描述均匀细杆沿纵向（即杆轴方向）的微振动。这类物理现象有一个共同的特点：由于物体的振动产生了波的传播，故方程(1.3)又称为波动方程。由于方程(1.3)仅含有一个空间变量 x ，故它被称为一维波动方程。

1.2.3 弦振动方程的定解条件

1. 初始条件

由于弦振动方程关于时间 t 是二阶的，故应给出两个初始条件，它们分别是

$$\text{初始位移} \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad (0 \leq x \leq l) \quad (1.4)$$

$$\text{初始速度} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad (0 \leq x \leq l) \quad (1.5)$$

2. 边界条件

边界条件有三种。

- (1) 给出两端垂直位移随时间的变化规律：

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t) \quad (t \geq 0) \quad (1.6)$$

我们称给出未知函数边界值的边界条件为第一类边界条件。特别，当弦的两端固定时，给出的位移为零， $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ 。我们称边界值为零的边界条件为齐次边界条件。

- (2) 两端在垂直方向受已知外力的作用。由于两端弦的张力对外界沿垂直方向的作用力分别为

$$T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad -T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l}$$

由牛顿第二定律，它们的负值应分别等于沿垂直方向所受外力 $\mu_1(t)$ 和 $\mu_2(t)$ ，

$$-T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \mu_1(t), \quad T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \mu_2(t)$$

上式可以写成

$$-\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \mu_1(t)/T, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \mu_2(t)/T \quad (1.7)$$

注意到弦在其左端点 $x = 0$ 处截面的外法线方向应为 x 的负方向，在右端点 $x = l$ 处截面的外法线方向应为 x 的正方向，故方程(1.7)给出了未知函数在边界处的外法线方向的导数值。我们称给出未知函数在边界处外法向导数值的边界条件为第二类边界条件。特别，若两端不受外力作用，则弦的两端可沿垂直方向自由滑动，故此时的边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$$

称为自由边界条件。

- (3) 若弦的两端被束缚在可沿垂直方向位移的弹簧上，其中左、右两弹簧平衡位置的高度分别为 u_0 和 u_1 ，弹簧常数分别为 k_0 和 k_1 。则使左边弹簧产生偏离其平衡位置位移 $u - u_0$ 的作用力 $k_0(u - u_0)$ 应等于弦对左端弹簧沿垂直方向的作用力 $T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}$ ，使右边弹簧产生偏离其平衡位置位移 $u - u_1$ 的作用力 $k_1(u - u_1)$ 应等于弦对右端弹簧沿垂直方向的作用力 $-T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l}$ ，

$$T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = k_0(u - u_0), \quad -T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = k_1(u - u_1)$$

记 $\sigma_0 = k_0/T$, $\sigma_1 = k_1/T$, 则上面边界条件可写成

$$\left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_0 u\right)\Big|_{x=0} = \sigma_0 u_0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_1 u\right)\Big|_{x=l} = \sigma_1 u_1 \quad (1.8)$$

我们称给出边界上未知函数外法线方向导数与未知函数的某线性组合的值的边界条件为第三类边界条件。注意这里的 $\sigma_0 > 0$, $\sigma_1 > 0$ 。当两弹簧的平衡位置与弦的平衡位置处于同一高度时, $u_0 = u_1 = 0$, 此时边界条件(1.8)化为第三类齐次边界条件

$$\left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_0 u\right)\Big|_{x=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_1 u\right)\Big|_{x=l} = 0$$

当然, 在求解波动方程(1.3)时, 也允许在两端给出不同类型的边界条件。

注意: 弦振动方程(1.3)除上面讨论的三种边界条件外, 还存在其他类型的边界条件, 如周期边界条件。又如, 若弦线是由两种不同性质的弦段衔接而成的, 则弦在衔接点应满足衔接边界条件。有关其他类型的边界条件, 本课程就不一一讨论了。

1.2.4 混合问题和Cauchy问题

以上所讨论的定解问题既含有初始条件, 又含有边界条件, 称为混合问题。

若仅研究弦线离两端较远的一小段在很短的时间段里的振动, 则端点的影响可以忽略, 认为弦是无限长的, 这样便得到只有初始条件而没有边界条件的定解问题——Cauchy问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & (t > 0, -\infty < x < \infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

1.2.5 高维波动方程

一块张紧的, 静止时处于水平平面 xoy 上的均匀薄膜(如鼓)作微小横振动时, 其垂直方向的位移函数 $u(x, y, t)$ 满足二维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad (x, y) \in D, t > 0$$

其中 $a = \sqrt{T/\rho}$, T 为膜的表面张力系数, ρ 为膜的面密度。膜振动方程的边界条件有三类:

- (1) 第一类边界条件 $u|_{\partial D} = \mu(x, y, t)$ 。 $\mu = 0$ 时为固定边界条件。
- (2) 第二类边界条件 $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial D} = \mu(x, y, t)$, 其中 n 为 D 的外法线方向。 $\mu = 0$ 时为自由边界条件。

(3) 第三类边界条件 $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\partial D} = \mu(x, y, t)$, 其中 $\sigma > 0$. 这对应于弹性支撑边界条件。

膜振动方程的初始条件为: 给出 $t = 0$ 时薄膜的初始位移和初始速度,

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in D$$

当研究声波或电磁波在空间传播问题时, 就会碰到三维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t)$$

1.2.6 边值问题

在膜的边界条件和垂直方向的外力不随时间 t 变化的情形, 不管初始条件如何, 经过相当长的时间后 ($t \rightarrow \infty$), 膜的位移将不随时间 t 变化, 膜将达到一个稳定的平衡位置, 则此时的位移函数 $u = u(x, y)$ 满足二维 Poisson 方程

$$\nabla^2 u \equiv \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = -\frac{1}{a^2} f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

当膜在垂直方向不受外力作用时, 其位移 u 满足二维 Laplace 方程

$$\nabla^2 u \equiv \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (x, y) \in D$$

由于无旋流动的速度势或者电场中的电位也满足 Poisson 方程或 Laplace 方程, 故 Poisson 方程或 Laplace 方程总称为位势方程。这时的定解条件只含有边界条件, 不含有初始条件, 称对应的定解问题为边值问题。称位势方程对应于第一类边界条件

$$u|_{\partial D} = \mu(x, y), \quad (x, y) \in D$$

的边值问题为第一类边值问题, 又称 Dirichlet 问题; 称对应于第二类边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial D} = \mu(x, y), \quad (x, y) \in D$$

的边值问题为第二类边值问题, 又称 Neumann 问题; 称对应于第三类边界条件

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right)\Big|_{\partial D} = \mu(x, y), \quad (x, y) \in D$$

的边值问题为第三类边值问题, 又称 Robin 问题。

对于三维位势方程, 也有类似的三类边值问题, 这里就不再赘述了。

习题1.2

1. 若弦在振动过程中，在垂直方向上除受质量力（力的线密度为 $F(x, t)$ ）作用外，还受到阻力作用，其中单位长度上所受阻力为 $-k\frac{\partial u}{\partial t}$ （即阻力方向与速度方向相反，阻力大小与速度值成正比，比例常数为 k ）。试导出弦的微小横振动方程。
2. 根据动量守恒定律导出均匀细直杆的微小纵向振动方程。设杆的横截面积为 S ，密度为 ρ ，杆沿轴向的位移和杨氏模量为 Y ，杆沿轴向不受外力作用。

§1.3 热传导方程及其定解条件

1.3.1 有关场论的一些知识（复习）

1. 梯度算子以及方向导数

在直角坐标系 $o-xyz$ 之下，梯度算子 ∇ 的定义是

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

它作用到任一标量函数 $f(x, y, z)$ 上就得到 $f(x, y, z)$ 的梯度（为一向量函数）

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

对空间某一单位向量 $\mathbf{l} = (\cos(\widehat{l, x}), \cos(\widehat{l, y}), \cos(\widehat{l, z}))$ ， ∇f 与 \mathbf{l} 的点积（数量积）就是 $f(x, y, z)$ 沿 \mathbf{l} 的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \nabla f \cdot \mathbf{l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos(\widehat{l, x}) + \frac{\partial f}{\partial y} \cos(\widehat{l, y}) + \frac{\partial f}{\partial z} \cos(\widehat{l, z})$$

特别的，如果向量 \mathbf{n} 是空间中的某个区域 Ω 的边界 $(\partial\Omega)$ 上的单位外法向量，即 $\mathbf{n} = (\cos(\widehat{n, x}), \cos(\widehat{n, y}), \cos(\widehat{n, z}))$ ，则得 $f(x, y, z)$ 的外法向导数 $\frac{\partial f}{\partial n}$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos(\widehat{n, x}) + \frac{\partial f}{\partial y} \cos(\widehat{n, y}) + \frac{\partial f}{\partial z} \cos(\widehat{n, z})$$

∇ 与光滑的向量值函数 $\mathbf{A}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 的点积为向量值函数 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 的散度

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

2. 散度定理（Gauss公式）

设 Ω 为某有界区域（可以是多连通）， \mathbf{n} 为其边界上的单位外法向量，向量值函数 $\mathbf{A}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 在 Ω 上二阶连续可微，在 $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$ 上一阶连续可微（可简记为 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \in C^2(\Omega) \cup C^1(\bar{\Omega})$ ），则成立散度定理

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{A} \, dx dy dz$$

或者等价地写成Gauss公式的形式

$$\begin{aligned} & \iint_S \left[P(x, y, z) \cos(\widehat{n, x}) + Q(x, y, z) \cos(\widehat{n, y}) + R(x, y, z) \cos(\widehat{n, z}) \right] dS \\ &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

1.3.2 热传导方程

研究物体 D 的热传导问题。假设物体的密度为 ρ ，比热为 c 。且记 t 时刻 D 内任一点 (x, y, z) 的温度为 $u(x, y, z, t)$ 。物体内部有一分布热源，它在单位时间单位体积释放出的热量为 $F(x, y, z, t)$ 。设物体内部任一点的热流密度向量为 $\mathbf{q}(x, y, z, t)$ ，其中 \mathbf{q} 的方向为热流方向， \mathbf{q} 的大小 $|\mathbf{q}|$ 为单位时间内通过在 (x, y, z) 点曲面（曲面的法线方向与 \mathbf{q} 平行）单位面积的热量。如图1.3所示，在 D 内任取一光滑闭曲面 S ，其内部区域为 Ω ， S 的

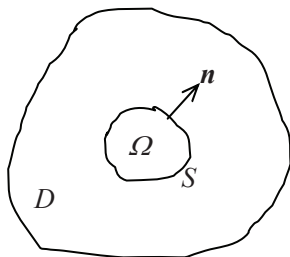


图 1.3: 物体的热传导问题

单位外法向量为 \mathbf{n} 。在 $[t_1, t_2]$ 时段内，物体的 Ω 部分所含热量的增量为

$$\iiint_{\Omega} (c\rho u|_{t=t_2} - c\rho u|_{t=t_1}) \, dx dy dz$$

在 $[t_1, t_2]$ 时段内，通过边界 S 流入 Ω 内的热量为

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_S \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) \, dS dt$$

在 $[t_1, t_2]$ 时段内， Ω 中分布热源放出的热量为

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} F(x, y, z, t) \, dx dy dz dt$$

若不考虑热辐射等其他因素，则根据能量守恒定律，在 $[t_1, t_2]$ 时段内， Ω 内的物体的热量的增加量应等于 $[t_1, t_2]$ 时段内通过 S 流入 Ω 中的热量与热源放出热量之和

$$\iiint_{\Omega} (c\rho u|_{t=t_2} - c\rho u|_{t=t_1}) \, dx dy dz = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) \, dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} F(x, y, z, t) \, dx dy dz dt \quad (1.9)$$

方程(1.9)就是能量守恒律的宏观表达式。若假设被积函数充分光滑并利用散度定理，则有

$$c\rho u|_{t=t_2} - c\rho u|_{t=t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} (c\rho u) \, dt$$

把上式代入(1.9)式，得

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (c\rho u) \, dx dy dz dt = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} (-\nabla \cdot \mathbf{q} + F) \, dx dy dz dt$$

由 Ω 及 $[t_1, t_2]$ 的任意性, 得热传导方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + F(x, y, z, t) \quad (1.10)$$

方程(1.10)这一个方程中含有四个未知函数 (u 和 \mathbf{q} 的三个分量)。因此方程不封闭。要使方程封闭, 必须补充 \mathbf{q} 与 u 之间的一些关系式 (称为本构关系)。事实上, 对于弦的横振动, 利用

$$T \sin \alpha = T \frac{\partial u}{\partial x} / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$$

及垂直方向的动量守恒定律只能导出

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial u}{\partial x} / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \right) + F(x, t)$$

上面的方程中含有弦的垂直位移 u 和张力的 T 这两个未知函数, 它也是不封闭的。只有补充了胡克定律 (在弹性限度内, 张力大小与弦的长度的增量成正比) 及利用了弦的微小振动的假设后, 并略去高阶小量才能推知张力 $T = \text{常数}$, 并导得方程(1.2)。对于热传导问题, 也有类似的联系: 热流函数 \mathbf{q} 与温度 u 的本构关系, 它就是实验定律——热传导的Fourier定律

$$\mathbf{q} = -k \nabla u \quad (1.11)$$

这里的 k 称为热传导系数, 对于各向异性的物体来说, 它是一个张量, 对于各向同性的物体来说, 它是一个正数。对于各向同性的物体来说, 热流密度的大小与温度梯度的模 $|\nabla u|$ 成正比, 比例常数就是热传导系数 k ; (1.11)式右端的负号表明 \mathbf{q} 的方向与温度梯度的方向相反, 即热量总是从温度高的地方向温度低的地方传导。热传导系数 k 一般依赖于物体各点的物理性质, 还与温度有关, 故 $k = k(x, y, z, u)$ 。把(1.11)式代入(1.10)式, 就得到封闭的热传导方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c u) = \nabla \cdot (k \nabla u) + F(x, y, z, t) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) + F(x, y, z, t) \quad (1.12)$$

热传导方程(1.12)一般是一个非线性方程。但若我们所研究的问题的温度变化范围不是很大, 则 k 可视为与温度无关, 即 $k = k(x, y, z)$ 。这样方程(1.12)就是一个线性方程。更进一步, 若物体为均匀各向同性, 即各向同性物体 D 在各点的物理特性都一样, 那么 k 为常数, 此常数只与构成该物体的物质有关, 且 c, ρ 也是只与物质有关的正的常数。此时, 热传导方程(1.12)可写成

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t) \quad (1.13)$$

其中, $a = \sqrt{k/(c\rho)}$, $f(x, y, z, t) = F(x, y, z, t)/(c\rho)$ 。

我们称对任意时段 $[t_1, t_2]$ 和任意 $\Omega \subset D$, 宏观守恒律(1.9)式都成立的函数 $u(x, y, z, t)$ 为热传导方程的广义解, 它只要求 u 关于 t 连续, u 关于 (x, y, z) 的一阶偏导数可积就可以了。广义解是一个完全具有物理意义的解。

方程(1.13)除能描述热传导现象外, 还能描述其他一些物理现象, 如溶质在溶剂中的扩散现象等。

1.3.3 热传导问题的定解条件

1. 初始条件

给出 $t = 0$ 时物体在任一点的温度分布

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D$$

2. 边界条件

边界条件有三种

(1) 第一类边界条件

给出 ∂D 上任一点温度随时间的变化规律,

$$u|_{\partial D} = \mu(x, y, z, t)$$

(2) 第二类边界条件

给出 ∂D 上任一点在单位时间内通过 ∂D 上单位面积流进 D 中的热量, 因为

$$\mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) = (-k\nabla u) \cdot (-\mathbf{n}) = k \frac{\partial u}{\partial n}$$

故这种情况下的边界条件可以写为

$$k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial D} = \mu(x, y, z, t)$$

或等价地

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial D} = \frac{1}{k} \mu(x, y, z, t)$$

特别地, 在与外界没有热交换(绝热)情形, 边界条件为

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial D} = 0 \tag{1.14}$$

(3) 第三类边界条件

设物体 D 在其边界 ∂D 附近与周围介质之间有热交换, 且热交换服从牛顿冷却定律。记周围介质的温度为 $u_1(x, y, z, t)$, 牛顿定律指出, 在单位时间内, 通过 ∂D 上单位面积流进 D 中的热量与温度差成正比,

$$\Delta Q = k_1(u_1 - u|_{\partial D})$$

其中 $k_1 > 0$ 称为热交换系数。但由Fourier定律, 这一热量应等于 $k \frac{\partial u}{\partial n}$, 故得第三类边界条件

$$k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial D} = k_1(u_1 - u|_{\partial D})$$

或等价地写成

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) \Big|_{\partial D} = \sigma u_1(x, y, z, t)$$

其中, $\sigma = k_1/k > 0$ 。在物体 D 与周围介质热交换非常弱的情况, 即 $k_1 \rightarrow 0$ 时, 可得绝热情况的边界条件(1.14); 在物体 D 与周围介质热交换非常强的情况, 即 $k_1 \rightarrow \infty$ 情形下, 边界条件可化为

$$u|_{\partial D} = u_1$$

即此时 $u|_{\partial D}$ 等于周围介质的温度。

1.3.4 Cauchy问题

当我们仅关心物体中远离边界的一小部分在较短的时间内的温度变化情况时, 边界条件的影响可以忽略, 这时可近似地把所考察的物体充满整个空间, 从而得到了Cauchy问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t), & (-\infty < x, y, z < \infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), & (-\infty < x, y, z < \infty) \end{cases}$$

1.3.5 稳定温度场问题

当外界条件不随时间 t 变化, 且热源的放热速率也与 t 无关时, 不管初始条件怎样, 经过相当长的时间后 ($t \rightarrow \infty$), 物体的温度分布总会趋于一种稳定的不随时间 t 变化的状态: $u = u(x, y, z)$ 。这时热传导方程化为Poisson方程

$$-\nabla^2 u \equiv - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{a^2} f(x, y, z)$$

特别在无热源情形, u 满足三维Laplace方程

$$\nabla^2 u = 0$$

在稳定温度场情形, 定解条件只含边界条件, 定解问题为边值问题。对应的边界条件有三种:

1. $u|_{\partial D} = \mu(x, y, z)$, 对应的边值问题为第一边值问题, 也称Dirichlet问题;
2. $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = \mu(x, y, z)$, 对应的边值问题为第二边值问题, 也称Neumann问题;
3. $(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u)|_{\partial D} = \mu(x, y, z)$ ($\sigma > 0$), 对应的边值问题为第三边值问题, 又称Robin问题。

1.3.6 低维热传导问题

若物体为均匀细杆, 则在同一截面上的温度近似相等(可取为截面上的平均温度)。在侧面绝热的情形下, 杆的温度分布 $u(x, t)$ (其中 x 方向为杆轴方向)满足一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

类似的, 侧面绝热的薄片的温度分布 $u(x, y, t)$ (其中 (x, y) 平面为薄片所在平面)满足二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t)$$

1.3.7 非线性偏微分方程和非线性偏微分方程组

至此, 我们所导出的偏微分方程都是线性的。从推导过程可以看到, 我们所导出的偏微分方程原本应该是非线性的, 只有在一定的限制条件(如弦的微小振动条件, 热传导系数与温度无关条件等)下, 方程才化为线性。事实上, 自然界和社会的许多现象及许多工程实际问题都必须用非线性偏微分方程或非线性偏微分方程组(如无粘流动的Euler方程组和粘性流体流动的Navier-Stokes方程组)才能加以描述, 它们的求解则要比线性偏微分方程困难得多。

习题1.3

长度为 a 的均匀细杆, 横截面积为 S , 横截面周长为 l , 杆的密度为 ρ , 比热为 c , 热传导系数为 k , 杆的左端保持常温 u_0 , 右端绝热, 侧面与外界有热交换, 热交换系数为 k_1 , 杆的环境温度为 u_1 , 细杆的内部无热源。设杆的初始温度为 $u = 0$ 。试导出杆的温度分布所满足的方程和定解条件。

§1.4 二阶线性偏微分方程的分类和化简

1.4.1 两个自变量的二阶线性偏微分方程的化简

1. 一般讨论

两个自变量二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f, \quad (x, y) \in D \quad (1.15)$$

其中, a_{ij} , b_i , c 和 f 均为区域 D 中充分光滑的函数, 且 a_{11} , a_{12} 和 a_{22} 不全为零。这里的 u_x , u_{xx} , u_{xy} , \dots 分别表示 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, \dots 。方程(1.15)中的二阶导数项的系数对应于一个二阶对称阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

由假设, 矩阵 A 的秩 $r(A) \geq 1$ 。我们的目的是引进自变量的可逆变换

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad (1.17)$$

使方程(1.15)得到化简。其中变换(1.17)的Jacobi矩阵

$$J = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix}, \quad \det(J) \neq 0 \quad (1.18)$$

非异, 于是由(1.17)可反解出

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta) \quad (1.19)$$

由(1.17)得

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, & u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} \end{aligned}$$

将以上各式代入(1.15)后, 可得 (ξ, η) 为自变量的 u 所满足的二阶线性偏微分方程

$$\tilde{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\tilde{a}_{12}u_{\xi\eta} + \tilde{a}_{22}u_{\eta\eta} + \tilde{b}_1u_\xi + \tilde{b}_2u_\eta + \tilde{c}u = \tilde{f} \quad (1.20)$$

这里的

$$\tilde{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \quad (1.21)$$

$$\tilde{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y \quad (1.22)$$

$$\tilde{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 \quad (1.23)$$

$$\tilde{b}_1 = a_{11}\xi_{xx} + 2a_{12}\xi_{xy} + a_{22}\xi_{yy} + b_1\xi_x + b_2\xi_y \quad (1.24)$$

$$\tilde{b}_2 = a_{11}\eta_{xx} + 2a_{12}\eta_{xy} + a_{22}\eta_{yy} + b_1\eta_x + b_2\eta_y \quad (1.25)$$

$$\tilde{c}(\xi, \eta) = c\left(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\right)$$

$$\tilde{f}(\xi, \eta) = f\left(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\right)$$

其中, (1.21)—(1.25)中的 a_{ij} , b_i , c 中的 (x, y) 必须用 $\left(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\right)$ 代入。由(1.21)—(1.23)知方程(1.20)中的二阶导数项的系数所对应的二阶对称阵

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

与原方程(1.15)中的二阶导数系数矩阵 A 之间成立合同关系

$$\tilde{A} = JAJ^T \quad (1.27)$$

其中 J^T 为 J 的转置。由Jacobi矩阵 J 的非奇异性得 $r(\tilde{A}) = r(A)$ 。

注意到方程(1.23)与方程(1.21)的形式完全一样, 仅是把 ξ 换成了 η , 因此, 若能找到下面的一阶非线性方程

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \quad (1.28)$$

的两个无关的解 $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, 则令

$$\xi = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \varphi_2(x, y) \quad (1.29)$$

就可把(1.20)中的 \tilde{a}_{11} 和 \tilde{a}_{22} 同时化为零。从而使方程得到简化。设 a_{11} , a_{22} 不同时为零(否则方程(1.15)已是简化形式)。不失一般形, 可设 $a_{11} \neq 0$, 此时, 方程(1.28)的非常数解 $\varphi = \varphi(x, y)$ ($\varphi = \text{常数}$ 一定是方程(1.28)的解, 但是这种解对我们无用)一定满足 $\varphi_y \neq 0$ (否则由(1.28)及 $a_{11} \neq 0$ 可得 $\varphi_x = 0$, 即 $\varphi(x, y) = \text{常数}$), 于是方程(1.28)可写成

$$a_{11} \left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\varphi_x}{\varphi_y} + a_{22} = 0 \quad (1.30)$$

方程(1.30)可以写成

$$a_{11} \left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y} - \frac{-a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \right) \left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y} - \frac{-a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \right) = 0 \quad (1.31)$$

或者等价地写成

$$a_{11}(\varphi_x + \lambda_1\varphi_y)(\varphi_x + \lambda_2\varphi_y) = 0 \quad (1.32)$$

其中

$$\lambda_1(x, y) = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad \lambda_2(x, y) = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad (1.33)$$

于是, 方程(1.28)的求解问题等价于求解下面两个一阶线性偏微分方程

$$\varphi_x + \lambda_1(x, y)\varphi_y = 0 \quad (1.34)$$

$$\varphi_x + \lambda_2(x, y)\varphi_y = 0 \quad (1.35)$$

即: 方程(1.34)或方程(1.35)的解一定是方程(1.28)的解; 反之, 方程(1.28)的解一定满足方程(1.34)或(1.35)中的一个。因此, 求解方程(1.28)的问题就转化为求解具有如下形式的一阶线性偏微分方程得到问题

$$\varphi_x + \lambda(x, y)\varphi_y = 0 \quad (1.36)$$

定理 $\varphi = \varphi(x, y)$ 是一阶线性偏微分方程(1.36)的一个解的充要条件是:

$$\varphi(x, y) = \text{常数} \quad (1.37)$$

是常微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \lambda(x, y) \quad (1.38)$$

的一个通积分。

〔证明〕 必要性。若 $\varphi = \varphi(x, y)$ 是方程(1.36)的一个解, 则沿常微分方程(1.38)的任一积分曲线

$$l: y = y(x)$$

成立

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(x, y(x))}{dx} &= \left. \frac{\partial\varphi(x, y(x))}{\partial x} \right|_{y=y(x)} + \left. \frac{\partial\varphi(x, y(x))}{\partial y} \right|_{y=y(x)} \cdot y'(x) \\ &= \left[\frac{\partial\varphi(x, y(x))}{\partial x} + \lambda(x, y) \frac{\partial\varphi(x, y(x))}{\partial y} \right]_{y=y(x)} = 0 \end{aligned}$$

故沿(1.38)的任一积分曲线 l , $\varphi(x, y) = \text{常数}$ 。因此, (1.37)为方程(1.38)的一个通积分。

充分性。若(1.37)为方程(1.38)的一个通积分, 则对 $\forall(x_0, y_0) \in D$, 过 (x_0, y_0) 点有方程(1.38)的一个积分曲线 l 通过, 其中 l 满足

$$l: y = y(x), \quad y'(x) = \lambda(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = \lambda(x_0, y_0) \quad (1.39)$$

由于 $\varphi(x, y) = \text{常数}$ 是方程(1.38)的一个通积分, 故把 $y = y(x)$ 代入 $\varphi(x, y)$ 后, 它应恒等于某常数

$$\varphi(x, y(x)) = \text{常数}$$

上式关于 x 求导后得

$$\frac{d\varphi(x, y(x))}{dx} = \left. \frac{\partial\varphi(x, y(x))}{\partial x} \right|_{y=y(x)} + \left. \frac{\partial\varphi(x, y(x))}{\partial y} \right|_{y=y(x)} \cdot y'(x) \equiv 0$$

上式在 $x = x_0$ 点也应成立。利用 $y(x_0) = y_0$ 和 $y'(x_0) = \lambda(x_0, y_0)$, 上式在 x_0 点变为

$$\varphi_x(x_0, y_0) + \lambda(x_0, y_0)\varphi_y(x_0, y_0) = 0$$

由 $(x_0, y_0) \in D$ 的任意性, 可知 $\varphi = \varphi(x, y)$ 是方程(1.36)的一个解。■

于是, 求解一阶偏微分方程(1.28)的问题就转化为求解两个一阶线性偏微分方程(1.34)和(1.35)的问题, 或等价地转化为求解下面两个一阶常微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = \lambda_2(x, y) \quad (1.40)$$

的通积分问题, 其中 $\lambda_1(x, y)$ 和 $\lambda_2(x, y)$ 由(1.33)式给出。我们称由(1.33)式给出的 $\lambda_1(x, y)$ 和 $\lambda_2(x, y)$ 为一阶偏微分方程(1.28)的特征值, 称常微分方程(1.40)为(1.28)的特征方程, 称特征方程(1.40)的积分曲线为(1.28)的特征线。注意到特征方程(1.40)可等价地写成

$$a_{11} \left[\frac{dy}{dx} - \lambda_1(x, y) \right] \left[\frac{dy}{dx} - \lambda_2(x, y) \right] = 0 \quad (1.41)$$

由(1.33)知

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{a_{22}}{a_{11}}$$

代入(1.41)后, 得

$$a_{11} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = 0 \quad (1.42)$$

(1.42)可以等价地写为

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \quad (1.43)$$

方程(1.42)或(1.43)都是一阶偏微分方程(1.28)的特征方程的不同形式。

2. 具体化简方法

下面根据判别式 $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ 的符号, 分三种情况讨论寻找自变量可逆变换(1.17)的方法, 以便方程(1.15)得到化简。

情形I $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$

这时方程(1.28)有两个互异的实特征值 $\lambda_1(x, y)$ 和 $\lambda_2(x, y)$, 特征方程(1.40)有两个通积分 $\varphi_1(x, y)=\text{常数}$ 和 $\varphi_2(x, y)=\text{常数}$ 。这时令

$$\xi = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \varphi_2(x, y) \quad (1.44)$$

则化简后的方程(1.20)中的系数取 $\tilde{a}_{11}(\xi, \eta) = 0$, $\tilde{a}_{22}(\xi, \eta) = 0$, 原方程(1.15)得到化简。由于这时

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = -\lambda_1, \quad \frac{\eta_x}{\eta_y} = -\lambda_2 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

故变换的Jacobi矩阵 J 满足

$$\det(J) = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

因此变换是可逆的。其次, 由于变换后的方程(1.20)的二阶导数的系数矩阵 \tilde{A} 与原方程(1.15)的二阶导数系数矩阵 A 同秩, 而 $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, 故 $r(A) = 2$ 。因此 $r(\tilde{A}) = r(A) = 2$, 故 $\det(\tilde{A}) = -\tilde{a}_{12}^2 < 0$, $\tilde{a}_{12} \neq 0$, 因此化简后的方程可以写成如下的标准形式,

$$u_{\xi\eta} = \alpha(\xi, \eta)u_{\xi} + \beta(\xi, \eta)u_{\eta} + \gamma(\xi, \eta)u + \delta(\xi, \eta) \quad (1.45)$$

【例1】 通过自变量的可逆变换, 把方程

$$yu_{xx} + 2(x+y)u_{xy} + 4xu_{yy} = 0 \quad (x > y > 0)$$

化为标准形式。

【解】 此时, $\Delta = (x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2 > 0$, 特征方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y \pm \sqrt{\Delta}}{y} = \frac{x+y \pm (x-y)}{y}$$

由特征方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+(x-y)}{y} = \frac{2x}{y} \quad (1.46)$$

得

$$\begin{aligned} 2xdx - ydy &= 0 \\ d\left(x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

故特征方程(1.46)有通积分

$$x^2 - \frac{1}{2}y^2 = \text{常数}$$

由特征方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-(x-y)}{y} = 2 \quad (1.47)$$

得

$$2dx - dy = 0$$

即

$$d(2x - y) = 0$$

故特征方程(1.47)有通积分

$$2x - y = \text{常数}$$

令

$$\xi = x^2 - \frac{1}{2}y^2, \quad \eta = 2x - y \quad (1.48)$$

则原方程化为

$$u_{\xi\eta} = \frac{y - 2x}{2(x - y)^2} u_{\xi}$$

上式中的系数必须写成 (ξ, η) 的函数。由(1.48)可得

$$y - 2x = -\eta, \quad 2(x - y)^2 = \eta^2 - 2\xi$$

原方程最终化为

$$u_{\xi\eta} = \frac{\eta}{2\xi - \eta^2} u_{\xi}$$

■

情形II $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$

这时方程(1.28)的特征值为重特征值, 特征方程(1.40)为同一方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \lambda \quad (1.49)$$

它只有一个通积分 $\varphi(x, y) = \text{常数}$ 。现任取一个与 $\varphi(x, y)$ 无关的函数 $\psi(x, y)$, 并令

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \quad (1.50)$$

则化简后的方程(1.20)中的系数 $\tilde{a}_{11}(\xi, \eta) = 0$ 。另外, 沿特征线 $\xi = \varphi(x, y)$ 关于 x 求导得

$$0 = \varphi_x + \varphi_y \frac{dy}{dx} = \varphi_x + \lambda \varphi_y = \xi_x + \lambda \xi_y$$

于是有

$$\xi_x = -\lambda \xi_y = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \xi_y \quad (1.51)$$

把(1.51)代入(1.20)中 \tilde{a}_{12} 的表达式得

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y \\ &= a_{11}\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\xi_y\eta_x + a_{12}\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_y\eta_y + \eta_x\xi_y\right) + a_{22}\xi_y\eta_y \\ &= -\frac{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}{a_{11}}\xi_y\eta_y = 0 \end{aligned}$$

此外, 由于 a_{11} , a_{12} , a_{22} 不同时为零, 故有 $r(A) \geq 1$; 但 $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, 故 $r(A) = 1$ 。又因为 $r(\tilde{A}) = r(A) = 1$, 而对称阵 \tilde{A} 中的 $\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{12} = 0$, 故必有 $\tilde{a}_{22} \neq 0$ 。所以化简后的方程必定能写成如下的标准形式

$$u_{\eta\eta} = \alpha u_{\xi} + \beta u_{\eta} + \gamma u + \delta \quad (1.52)$$

情形III $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$

这时特征值为一对共轭的虚数,

$$\lambda = \sigma \pm i\mu \quad (\mu > 0) \quad (1.53)$$

特征方程(1.40)有一对共轭的通积分

$$\varphi_1(x, y) \pm i\varphi_2(x, y) = \text{常数} \quad (1.54)$$

在这种情况下, 令

$$\xi = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \varphi_2(x, y) \quad (1.55)$$

则复函数 $\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y) = \xi + i\eta$ 满足方程(1.28), 即

$$a_{11}(\xi_x + i\eta_x)^2 + 2a_{12}(\xi_x + i\eta_x)(\xi_y + i\eta_y) + a_{22}(\xi_y + i\eta_y)^2 = 0$$

分开实部和虚部得

$$\begin{aligned} & (a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2) - (a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2) \\ & + i2[a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y] = 0 \end{aligned}$$

比较上式的实部和虚部, 并注意到化简的方程(1.20)中各系数的表达式(1.21), (1.22)和(1.23), 可知化简后的方程(1.20)中的二阶导数项系数满足

$$\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{22}, \quad \tilde{a}_{12} = 0 \quad (1.56)$$

故化简后的方程(1.20)的形式为

$$\tilde{a}_{11}(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) + \tilde{b}_1 u_{\xi} + \tilde{b}_2 u_{\eta} + \tilde{c}u = \tilde{f}$$

由于 $\varphi = \xi + i\eta$ 满足对应于 $\lambda = \sigma + i\mu$ 的特征方程

$$\varphi_x + (\sigma + i\mu)\varphi_y = 0$$

即

$$\xi_x + \sigma\xi_y - \mu\eta_y = 0, \quad \eta_x + \mu\xi_y + \sigma\eta_y = 0$$

所以

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sigma\xi_y + \mu\eta_y & \xi_y \\ -\mu\xi_y - \sigma\eta_y & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu\eta_y & \xi_y \\ -\mu\xi_y & \eta_y \end{vmatrix} = \mu(\xi_y^2 + \eta_y^2) > 0$$

因此变换(1.55)是可逆的。注意到 $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, 故 $r(A) = 2$, 于是 $r(\tilde{A}) = r(A) = 2$, $\det(\tilde{A}) = \tilde{a}_{11}^2 > 0$, $\tilde{a}_{11} \neq 0$ 。因此原方程(1.15)最终可化为如下的标准形式,

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \alpha u_{\xi} + \beta u_{\eta} + \gamma u + \delta \quad (1.57)$$

【例2】 通过自变量的可逆变换, 把方程

$$x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + (x^2 + y^2) u_{yy} = 0 \quad (x > 0, y > 0)$$

化为标准形式。

【解】 此时, $\Delta = x^2 y^2 - x^2(x^2 + y^2) = -x^4 < 0$, 特征方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-xy \pm ix^2}{x^2} = \frac{-y \pm ix}{x} \quad (1.58)$$

得

$$x dy + y dx \mp i x dx = 0$$

$$d(xy) \mp i d\left(\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

$$d\left[xy \mp i\frac{x^2}{2}\right] = 0$$

故特征方程(1.58)有复通积分

$$xy \mp i\frac{x^2}{2} = \text{常数}$$

令

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{x^2}{2}$$

最终方程化为

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \frac{\xi}{2\eta^2} u_{\xi} - \frac{1}{2\eta} u_{\eta}$$

注意! 以下做法是错误的。把特征方程写成

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \pm i$$

方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = 1$$

的通积分分别是

$$xy = \text{常数}, \quad x - y = \text{常数}$$

令

$$\xi = xy, \quad \eta = x - y$$

对原方程进行化简。 ■

1.4.2 两个自变量二阶线性偏微分方程的分类

由(1.27)可知, 经过自变量可逆变换后所得到的方程(1.20)的二阶导数的系数矩阵 \tilde{A} 与原方程(1.15)的二阶导数的系数矩阵 A 之间成立合同关系, 而合同变换保持实对称矩阵正特征值个数、负特征值个数和零特征值个数不变。因此根据 A 的特征值的符号对方程(1.15)进行分类, 就抓住了问题的本质: 二阶线性偏微分方程不会因自变量的可逆变换而改变其类型。由于 a_{11} , a_{12} , a_{22} 不同时为零, $r(A) \geq 1$, 故 A 的特征值不可能全为零。注意到 A 的特征方程为

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

故 A 的特征值 λ_1 和 λ_2 之积为

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -\Delta$$

定义1 若二阶线性偏微分方程(1.15)的二阶导数系数矩阵 A 在 (x_0, y_0) 点的特征值异号(一正一负), 则称此方程在这点是双曲型的(这对应于 $\Delta > 0$ 情形); 若 A 在这点的特征值同号(同为正或同为负), 则称此方程在这点是椭圆型的(这对应于 $\Delta < 0$ 情形); 若 A 在这点有一个特征值为零(另一个不必为零), 则称此方程在这点是抛物型的(这对应于 $\Delta = 0$ 情形)。

定义2 若方程(1.15)在区域 D 中每点都是双曲型的, 则称它在 D 中是双曲型的。类似可给出方程(1.15)在 D 中是椭圆型和抛物型的定义。

注1 二阶线性偏微分方程(1.15)在某点 (x_0, y_0) 的类型必定属于以上三种类型的某一种, 且由系数的连续性知, 它在某点是双曲型的或椭圆型的, 则它在这点的某个小邻域中也是双曲型或椭圆型的。但若它在某点是抛物型的, 则不一定存在这点的某个小邻域, 使它在此小邻域中也是抛物型的。

注2 二阶线性偏微分方程(1.15)在区域 D 中的类型除上面三种外, 还可能有第四种: 在 D 的某些部分是双曲型的, 在其余部分是椭圆型的, 而在分割这两部分的某些曲线上, 它是抛物型的。此时称方程(1.15)在 D 是混合型的。在研究跨音速流动问题时, 就会碰到这种混合型方程。

【例3】 考察一维波动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$$

把 t 看成第一个自变量, 把 x 看成第二个自变量, 则有 $a_{11} = 1$, $a_{22} = -a^2$, $a_{12} = 0$, $\Delta = a^2 > 0$, 或由 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -a^2$, 特征值异号可知, 一维波动方程是双曲型的。

【例4】 考察一维热传导方程

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t)$$

由 $a_{11} = a_{12} = 0$, $a_{22} = -a^2$, $\Delta = 0$, 或由 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -a^2$, 特征值一零一非零可知一维热传导方程是抛物型的。

【例5】 考察二维Poisson方程

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$$

由 $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = 0$, $\Delta = -1 < 0$, 或由 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 两特征值同号可知二维Poisson方程是椭圆型的。

【例6】 考察Tricomi方程

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

由 $a_{11} = y$, $a_{22} = 1$, $a_{12} = 0$, $\Delta = -y$ 知, 此方程在上半平面上是椭圆型的, 在下半平面上是双曲型的, 在 x 轴上是抛物型的。因此, 在任何包含实轴上点的任一区域内, Tricomi方程是混合型的。

1.4.3 多个自变量的二阶线性偏微分方程的分类

n 个自变量 x_1, \dots, x_n 的二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \quad (1.59)$$

这里的 a_{ij} , b_i , c 和 f 为关于 x_1, \dots, x_n 的充分光滑的函数, 且 $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, \dots, n$)不为零。这样, 方程(1.59)的二阶导数项的系数就构成了一个对称阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad A^T = A \quad (1.60)$$

我们知道二维Poisson方程、一维波动方程和一维热传导方程分别是椭圆型、双曲型和抛物型的。很自然, 高维情形的这三种方程应保持它们的类型不变。注意到 n 维Poisson方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f(x_1, \dots, x_n)$$

的二阶导数系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

其特征值同号; n 维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) = f(x_1, \dots, x_n, t)$$

的二阶导数系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}$$

其 n 个特征值同号，并与余下的一个特征值异号； n 维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) = f(x_1, \cdots, x_n, t)$$

的二阶导数系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}$$

其特征值一个为零，其余特征值同号。再注意到方程(1.59)两边乘以-1后不会改变其类型，我们可以很自然地得到如下的定义：

定义3 若在某点方程(1.59)的二阶导数系数矩阵 A 的特征值同号，则称此方程在这点是椭圆型的；若 A 的特征值有 $n-1$ 个同号，并与余下的一个特征值异号，则称此方程在这点是双曲型的；若 A 的特征值有一个为零，其余特征值同号，则称此方程在这点是抛物型的。

定义4 若方程(1.59)在区域 D 中每点都是椭圆型的，则称它在 D 中是椭圆型的。类似可给出方程(1.59)在 D 中是双曲型和抛物型的定义。若方程(1.59)在 D 中的某些部分是椭圆型的，在其余部分是双曲型的，则称它在 D 中是混合型的。

注3 当 $n \geq 3$ 时，方程(1.59)在某点的类型除上面三种情况外，还有其他情况，如可以有一些特征值为零，一些特征值为正，另一些特征值为负；又如当 $n \geq 4$ 时，可以有 $n_1 \geq 2$ 个特征值为正， $n - n_1 \geq 2$ 个特征值为负（称为超双曲型的）。这些类型的方程有的至今尚未见到在物理力学中的应用，有的是不适定的（定解问题的适定性我们将在下节讨论），故不在本课程的研究范围之内。

1.4.4 多个自变量二阶线性偏微分方程的化简

我们的目的是引进自变量的可逆变换

$$\xi_k = \xi_k(x_1, \cdots, x_n) \quad (k = 1, \cdots, n) \quad (1.61)$$

使方程(1.59)得到化简, 其中变换的Jacobi矩阵

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

非异。把

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi_i} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}, \quad i = 1, \cdots, n \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, \cdots, n \end{aligned}$$

代入方程(1.59), 并注意到

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ij} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \\ \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{i=1}^n b_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \end{aligned}$$

可得变换后的方程为

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \tilde{a}_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \sum_{k=1}^n \tilde{b}_k \frac{\partial u}{\partial \xi_k} + \tilde{c}u = \tilde{f} \quad (1.63)$$

其中

$$\tilde{a}_{kl} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}, \quad k, l = 1, \cdots, n \quad (1.64)$$

$$\tilde{b}_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}, \quad k = 1, \cdots, n \quad (1.65)$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}(\xi_1, \cdots, \xi_n) &= c(x_1(\xi_1, \cdots, \xi_n), \cdots, x_n(\xi_1, \cdots, \xi_n)) \\ \tilde{f}(\xi_1, \cdots, \xi_n) &= f(x_1(\xi_1, \cdots, \xi_n), \cdots, x_n(\xi_1, \cdots, \xi_n)) \end{aligned}$$

而

$$x_i = x_i(\xi_1, \cdots, \xi_n), \quad (i = 1, \cdots, n)$$

为变换(1.61)的逆变换。由(1.64)知, 变换后的方程(1.63)的二阶导数系数矩阵

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

与原方程(1.59)的二阶导数系数矩阵 A 之间成立合同关系,

$$\tilde{A} = JAJ^T \quad (1.67)$$

由于一个实对称矩阵的合同变换保持矩阵正特征值个数、负特征值个数和零特征值个数不变, 故引进自变量的可逆变换后, 不可能改变其类型。

下面分两种情况讨论方程(1.59)的化简问题。

1. 方程(1.59)的所有二阶导数的系数都是常数, 即由(1.60)式定义的对称阵 A 为常数矩阵。根据线性代数知识知道, 这时存在一个非异矩阵 P , 使

$$PAP^T = \Lambda \quad (1.68)$$

这里的 Λ 为对角阵, 其对角元为 ± 1 或零。引进自变量的线性变换

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1.69)$$

注意到此时的变换矩阵 $J = P$, 变换后方程的二阶导数系数矩阵 $\tilde{A} = \Lambda$, 可得椭圆型方程的标准形式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_n^2} + \text{低阶导数项} = \tilde{f} \quad (1.70)$$

双曲型方程的标准形式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_n^2} \right) + \text{低阶导数项} = \tilde{f} \quad (1.71)$$

抛物型方程的标准形式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_n^2} + \text{低阶导数项} = \tilde{f} \quad (1.72)$$

2. 当 $n \geq 3$ 时, 在方程(1.59)的二阶导数系数为 x_1, \cdots, x_n 已知函数的情形, 是否存在自变量的可逆变换(1.61), 把椭圆型方程、双曲型方程和抛物形方程分别化成标准形式(1.70)、(1.71)和(1.72)呢? 回答是否定的。因为此时的约束条件需有 \tilde{A} 的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个非对角元为零, 且要求对角元中至少有两个对角元是相等的, 而未知函数只有 n 个, 约束条件的个数超过未知函数的个数, 故满足这些约束条件的未知函数 $\xi_k(x_1, \cdots, x_n)$, ($k = 1, \cdots, n$)是不存在的。

习题1.4

通过自变量的可逆变换,把下面方程化为标准形式.

1. $u_{xx} - 2 \cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x) u_{yy} - y u_y = 0$

2. $(1 + x^2) u_{xx} + (1 + y^2) u_{yy} + x u_x + y u_y = 0$

§1.5 线性偏微分方程的叠加原理, 定解问题的适定性

1.5.1 叠加原理

我们已经引进了椭圆型、双曲型和抛物型线性偏微分方程的定义。作为线性方程, 它们都有一个共同的性质, 即关于方程右端自由项和定解条件成立叠加原理。叠加原理通常有三种情况, 现以一维波动方程的混合问题为例来说明。

1. 有限叠加原理

若 $u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t)$ 分别满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} = f_k(x, t), & (0 < x < l, t > 0) \\ u_k|_{x=0} = \mu_k(t), \quad u_k|_{x=l} = \nu_k(t), & (t \geq 0) \\ u_k|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad \frac{\partial u_k}{\partial t}|_{t=0} = \psi_k(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.73)$$

设 c_1, c_2, \dots, c_n 为 n 个任意常数, 则

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n c_k u_k(x, t) \quad (1.74)$$

满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{x=0} = \mu(t), \quad u|_{x=l} = \nu(t), & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (1.75)$$

其中

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{k=1}^n c_k f_k(x, t); \\ \mu(t) &= \sum_{k=1}^n c_k \mu_k(t), \quad \nu(t) = \sum_{k=1}^n c_k \nu_k(t); \\ \varphi(x) &= \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^n c_k \psi_k(x) \end{aligned} \quad (1.76)$$

注1 若 $f_k(x, t) = 0, \mu_k(t) = 0, \nu_k(t) = 0 (k = 1, \dots, n)$, 即 $u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)$ 都满足齐次方程和齐次边界条件, 则它们的任意线性组合(1.74)也满足齐次方程和齐次边界条件,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

注2 我们这里列出的两端边界条件都是第一类的。实际上, 对于第二和第三类边界条件以及两端不同类型的边界条件, 也成立叠加原理。

2. 无限叠加原理

设无穷多个函数 $u_k(x, t)$ 分别是定解问题(1.73)的解, 这里的 $k = 1, 2, \dots$ 。若级数

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(x, t); \\ \mu(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu_k(t), \quad \nu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \nu_k(t); \\ \varphi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x) \end{aligned} \quad (1.77)$$

关于 $x \in [0, l]$, $t \in [0, +\infty]$ 一致收敛, 且级数

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x, t) \quad (1.78)$$

本身以及关于 x 和 t 逐项求一阶导数和二阶导数后所得级数关于 $x \in [0, l]$, $t \in [0, +\infty]$ 都是一致收敛的, 则由一致收敛级数的极限性质和导数性质可知, 由(1.78)式定义的函数 $u(x, t)$ 是问题(1.75)的解, 其中(1.75)中的方程右端 $f(x, t)$, 边界条件 $\mu(t)$ 和 $\nu(t)$ 以及初始条件 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 由(1.77)定义。

3. 积分形式的叠加原理

仅以关于方程右端的叠加原理来说明。设 $u(x, t; \xi, \tau)$, $f(x, t; \xi, \tau)$ 的定义域为 $x \in [0, l]$, $t \in [0, +\infty]$, $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ 。若把 x 和 t 看成参数, 含参变量的积分(可以是含参变量广义积分)

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} u(x, t; \xi, \tau) d\xi d\tau = U(x, t) \quad (1.79)$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x, t; \xi, \tau) d\xi d\tau = F(x, t) \quad (1.80)$$

本身及被积函数关于 x 和 t 求一阶导数和二阶导数所得积分关于 $x \in [0, l]$, $t \in [0, +\infty]$ 都是一致收敛的。又若把 $(\xi, \tau) \in [\xi_1, \xi_2] \times [\tau_1, \tau_2]$ 看成参数, $u(x, t; \xi, \tau)$ 和 $f(x, t; \xi, \tau)$ 关于 (x, t) 满足方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t; \xi, \tau), \quad (0 \leq x \leq l, t \geq 0) \quad (1.81)$$

则由(1.79)和(1.80)式定义的 $U(x, t)$, $F(x, t)$ 满足方程

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = F(x, t) \quad (1.82)$$

关于边界条件和初始条件也有类似的叠加原理, 读者可作为练习自行列出。

1.5.2 定解问题的适定性

定解问题的适定性是指解的存在性、唯一性以及解关于定解条件（如初始条件和边界条件）的连续依赖型（又称解关于定解条件的稳定性）。

1. 关于解的存在性的说明

任一物理过程在某时刻总处于一定的状态，因此解的存在性在物理上是没有问题的。但真实的物理过程往往非常复杂，在用数学物理方程定解问题去描述它们时，总要做一些简化假设。若简化解释不合理，则所得数学物理定解问题可能就没有解，或虽然有解，但这种解并不是物理上需要的。例如，两端固定的长度为 l 的弦，若开始

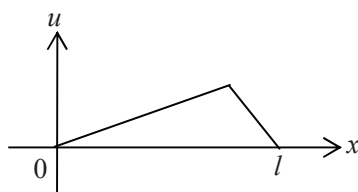


图 1.4: 弦的折线形式的初始位移

时在弦中间某一点 x_0 处把弦轻轻提起到一定高度后再突然放开，则弦振动方程混合问题的初始条件为 $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $u_t|_{t=0} = 0$ ($0 \leq x \leq l$)，其中 $\varphi(x)$ 为连续的分段线形函数， $\varphi(x)$ 在 x_0 点处的导数不存在，因此这一混合问题不可能存在二阶连续可微的古典解。但这一问题在物理上完全合理，因此求这一问题的解就具有实际意义。那么，问题究竟出在什么地方呢？回忆一下，在弦振动方程的推导过程中，我们最初得到的动量守恒律的宏观表达式(1.1)。这个表达式只要求位移函数 $u(x, t)$ 的一阶导数可积分就可以了，而弦振动方程(1.2)是在 $u(x, t)$ 二阶连续可微的人为假设下得到的。如果把对任意 $[x_1, x_2]$ 和 $[t_1, t_2]$ ，(1.1)式都成立的 $u(x, t)$ 称为弦振动方程的解（广义解），则我们现在的这个定解问题的解就存在了。因此，解是否存在，还与解所属的函数类型有关。一般来说，解的光滑性要求越高，解越不容易存在；解的光滑性要求越低，解的存在性越容易满足。

另外，若定解问题的提法不恰当，例如所提的定解条件太多，那么解也可能不存在。

2. 关于解的唯一性的说明

任一物理过程在某时刻只可能处于唯一的一种状态，因此解的唯一性在物理上也是没有问题的。但若定解问题的提法不恰当，例如定解条件太少，解就有可能不唯一。

另外，一般来说对解的光滑性要求越高，解的唯一性越容易满足；对解的光滑性要求越低（例如一些广义解），解的唯一性越难满足。在后一情形，往往需要补充另外

的物理条件，解才可能是唯一的。例如，在存在激波等强间断（即解的本身不连续）的空气动力学问题中，要使广义解唯一，必须附加越过间断熵要增加的条件。

3. 关于解的稳定性的说明

定解条件（初始条件和边界条件）往往是通过实际测量得到的。由于测量的仪器设备和人眼观察的误差，故定解条件的误差总是难免的。若定解条件的微小误差所引起的解的误差也很小，则称该定解问题是稳定的；否则就称解是不稳定的。既然谈到误差的大小，就存在一个用什么尺去度量它们的问题，举例来说，对一个 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ ，用得最多的两种度量它们大小的方法是： $f(x)$ 的最大模范数

$$\|f\|_{\infty} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

和平方可积空间范数

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

4. 关于解的适定性的说明

解的适定性研究对定解问题的求解（数值求解）非常重要。如果定解问题的解不存在，我们就无法求解；如果解不唯一，就无法知道求出的解是否是所需要的物理解；如果解不稳定，就有可能在求出的解中，由定解条件所引起的误差掩盖了真实的物理状态，从而使解释失去可信性。但物理力学和工程实际中存在大量的适定性还没有解决的定解问题以及大量的不适定问题。在这种情形，我们决不能被适定性研究框死，而应该根据实际问题的需要，用各种方法（包括数值方法）去大胆地求解这类定解问题。对于所求出的这类定解问题的解，我们可用实验的方法，或者直接通过工程实践来检验它是否是所需要的物理解。

第二章 行波法、波动方程Cauchy问题的解

§2.1 一维波动方程的Cauchy问题

2.1.1 一维无界弦的自由振动问题，d'Alembert公式和d'Alembert解法

1. d'Alembert公式

为了求解一维齐次波动方程的Cauchy问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (t > 0, -\infty < x < \infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) & (-\infty < x < \infty) \end{cases} \quad (2.1)$$

我们首先对方程进行化简。方程(2.1)的特征方程为

$$\frac{dx}{dt} = \pm a \quad (2.3)$$

对应的特征线为

$$x \pm at = \text{常数} \quad (2.4)$$

令

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at \quad (2.5)$$

则方程(2.1)化为

$$u_{\xi\eta} = 0 \quad (2.6)$$

方程(2.6)可写成

$$(u_{\xi})_{\eta} = 0$$

$$\therefore u_{\xi} = f_1(\xi)$$

$$u = \int f_1(\xi) d\xi + g(\eta) = f(\xi) + g(\eta) \quad (2.7)$$

其中 $f(\xi)$ 和 $g(\eta)$ 分别为单个自变量 ξ 和 η 的一阶连续可微函数，以(2.5)代入(2.7)得原方程(2.1)的通解。

$$u = f(x + at) + g(x - at) \quad (2.8)$$

下面, 我们利用初始条件(2.2)把通解(2.8)中的两个单变量函数 f 和 g 的形式确定下来。由(2.8)得

$$u_t = a \left[f'(x+at) - g'(x-at) \right] \quad (2.9)$$

把(2.8)和(2.9)代入(2.2)得

$$f(x) + g(x) = \varphi(x) \quad (2.10)$$

$$f'(x) - g'(x) = \frac{1}{a} \psi(x) \quad (2.11)$$

对方程(2.11)两边关于 x 积分, 得

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + c \quad (2.12)$$

其中, x_0 是任意取定的常数, 而 c 是任意常数。由(2.10)和(2.12)可解得

$$f(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} c \quad (2.13)$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - \frac{1}{2} c \quad (2.14)$$

∴

$$f(x+at) = \frac{1}{2} \varphi(x+at) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} c \quad (2.15)$$

$$g(x-at) = \frac{1}{2} \varphi(x-at) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(\xi) d\xi - \frac{1}{2} c \quad (2.16)$$

把(2.15)和(2.16)代入(2.8), 可得定解问题(2.1)、(2.2)解的表达式

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \quad (2.17)$$

称(2.17)为一维齐次波动方程Cauchy问题解的d'Alembert公式。称从一维齐次波动方程(2.1)的通解(2.8)出发, 利用定解条件把通解中的任意函数确定下来, 从而求出解的表达式的方法为d'Alembert解法。利用含参变量积分关于参数的求导法则可知, 当 $\varphi(x) \in C^2(-\infty, \infty)$, $\psi \in C^1(-\infty, \infty)$ 时, d'Alembert公式(2.17)确实给出了一维齐次波动方程Cauchy问题的解。由d'Alembert公式可以知道, 若初始条件 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 都是 x 的奇(偶, 周期为 l 的)函数, 则解 $u(x, t)$ 也是 x 的奇(偶, 周期为 l 的)函数。

2. 利用d'Alembert解法求解一维齐次波动方程其他定解问题的例子

d'Alembert解法不仅可以用来求解一维齐次波动方程的Cauchy问题, 还可以用来求解这一方程的其他定解问题, 如下面的达布问题,

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (t > 0, 0 < x < at) \\ u|_{x=0} = \varphi(t), \quad u|_{x=at} = \psi(t) & (t \geq 0) \end{cases} \quad (2.18)$$

$$(2.19)$$

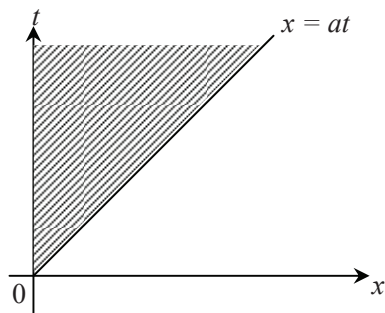


图 2.1: 达布问题的求解区域

一维齐次波动方程的通解(2.8)可写成另一种形式

$$u(x, t) = f\left(t + \frac{x}{a}\right) + g\left(t - \frac{x}{a}\right) \quad (2.20)$$

(相当于把 $f(x + at)$ 的自变量除以 a , $g(x - at)$ 的自变量除以 $-a$)。把(2.20)代入(2.19)得

$$f(t) + g(t) = \varphi(t) \quad (2.21)$$

$$f(2t) + g(0) = \psi(t) \quad (2.22)$$

由(2.22)得

$$f(t) = \psi\left(\frac{t}{2}\right) - g(0) \quad (2.23)$$

把(2.23)代入(2.21)得

$$g(t) = \varphi(t) - \psi\left(\frac{t}{2}\right) + g(0) \quad (2.24)$$

∴

$$f\left(t + \frac{x}{a}\right) = \psi\left(\frac{t}{2} + \frac{x}{2a}\right) - g(0) \quad (2.25)$$

$$g\left(t - \frac{x}{a}\right) = \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) - \psi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2a}\right) + g(0) \quad (2.26)$$

∴

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f\left(t + \frac{x}{a}\right) + g\left(t - \frac{x}{a}\right) \\ &= \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) + \psi\left(\frac{t}{2} + \frac{x}{2a}\right) - \psi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2a}\right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

注意到 $u(0, 0) = \varphi(0) = \psi(0)$, 易知(2.27)确实给出了达布问题的解。

3. 行波和行波法

由(2.8)式知道, 问题(2.1)和(2.2)的解是由 $f(x + at)$ 和 $g(x - at)$ 叠加而成的。首先考察 $u = g(x - at)$ 形式的解。它在 $t = 0$ 时的波形为 $u = g(x)$; 在 $t = t_0$ 时的波形

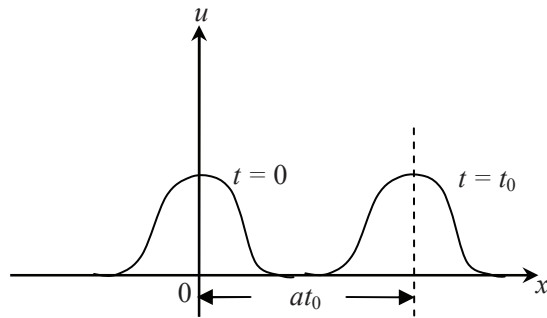


图 2.2: 右行波

为 $u = g(x - at_0)$, 其形状与 $t = 0$ 时完全一样, 不同的是其位置向右移动了一个距离 at_0 , 即波形以常数速度 a 向右传播。我们称这种波为右传播波, 又称为右行波。类似地, $u = f(x + at)$ 是以常数速度 a 向左传播, 即左行波, 故问题(2.1)、(2.2)的解由左行波和右行波叠加而成。左行波和右行波总称为行波, 故 d'Alembert 解法又成为行波法。

4. 依赖区间、决定区域和影响区域

由 d'Alembert 公式(2.17)知道, 问题(2.1)、(2.2)的解在 (x_0, t_0) 点的值 $u(x_0, t_0)$ 仅依赖于初始条件 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在区间 $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ 的值, $u(x_0, t_0)$ 的值与 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在此区间外的值无关。我们称区间 $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ 为解在 (x_0, t_0) 点的依赖区间。在 $x-t$ 平面上, 它可由 (x_0, t_0) 点 向下作两条特征线截 x 轴而得, 其中特征线的斜率分别

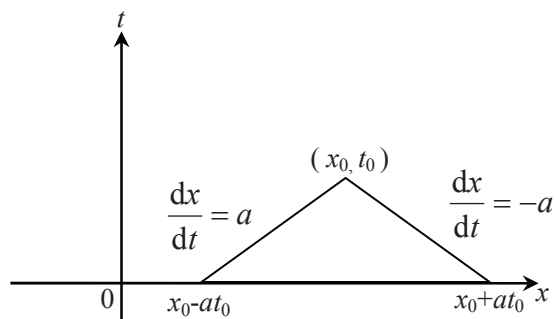


图 2.3: 依赖区间

为 $\frac{dx}{dt} = \pm a$ 。

对于 x 轴上的区间 $[\alpha, \beta]$, 由左端点向上作特征线 $x = \alpha + at$, 由右端点向上作特征线 $x = \beta - at$, 这两条特征线与此区间一起围成 $x-t$ 平面的一个等腰三角形区域 D , 易知区域 D 中任一点 (x_0, t_0) 的依赖区间都落在 $[\alpha, \beta]$ 内, 因此解在区域 D 中的任一点的值完全被初始条件在 $[\alpha, \beta]$ 内的值所决定, 称 D 为区间 $[\alpha, \beta]$ 的决定区域。

对 x 轴上的区间 $[\alpha, \beta]$, 由左端点向上作特征线 $x = \alpha - at$, 以右端点向上作特征线 $x = \beta + at$, 这两条特征线与此区间一起围成一个 $x-t$ 平面上的无界区域 D , 易知, D 中任一点的依赖区间都包含 $[\alpha, \beta]$ 中的点, 因此当初始条件在 $[\alpha, \beta]$ 中的值发生改变时, 解在 D 中任一点的值都会发生变化; D 外任一点的依赖区间都不包含 $[\alpha, \beta]$ 中的

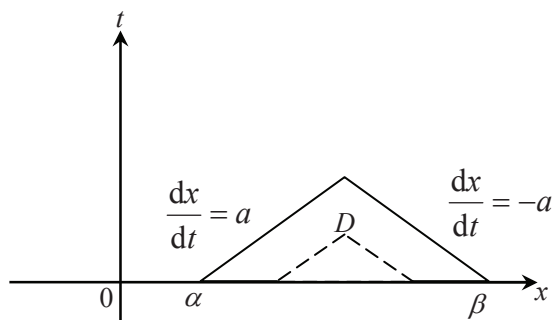


图 2.4: 决定区域

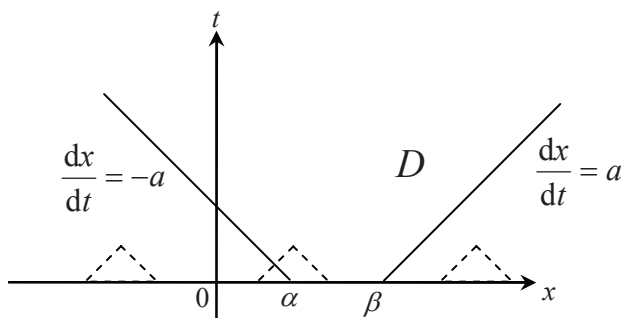


图 2.5: 影响区域

点，因此当初始条件在 $[\alpha, \beta]$ 中的值发生改变时，解在 D 外任一点的值都不会发生变化。称 D 为在区间 $[\alpha, \beta]$ 的影响区域。当 $[\alpha, \beta]$ 退化成一点 x_0 时，便得到 x_0 点的影响区域。因此任一点 x_0 的初始扰动都以速度 a 分别向左、右传播，它在有限时间 t 内的影响范

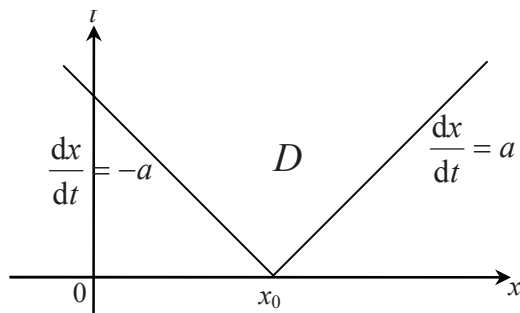


图 2.6: 一点的影响区域

围 $[x_0 - at, x_0 + at]$ 是有限的。

5. 半无界弦的自由振动问题

左端固定的半无界弦的自由振动可归结为如下定解问题，

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (x > 0, t > 0) \\ u|_{x=0} = 0, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) & (x \geq 0) \end{cases} \quad (2.28)$$

在求解定解问题(2.28)之前,我们先复习一下高等数学中有关函数奇、偶延拓的知识。对于定义在 $[0, +\infty]$ 上的光滑函数 $f(x)$,若 $f(0) = 0$,则通过奇延拓,可得 $(-\infty, +\infty)$ 上的光滑函数 $\tilde{f}(x)$;若 $f'(0) = 0$,则通过偶延拓可得 $(-\infty, +\infty)$ 上的光滑函数 $\tilde{f}(x)$ 。

我们的目的是利用d'Alembert公式求解问题(2.28)。为此,我们必须构造一个相应的Cauchy问题,注意到 $u|_{x=0} = 0$,我们对 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 进行奇延拓,

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases}, \quad \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

以 $(-\infty, \infty)$ 上定义的 $\tilde{\varphi}(x)$ 和 $\tilde{\psi}(x)$ 构造一个Cauchy问题

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - a^2 \tilde{u}_{xx} = 0, & (t > 0, -\infty < x < \infty) \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x), \tilde{u}_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(x), & (-\infty < x < \infty) \end{cases} \quad (2.30)$$

问题(2.30)的解由d'Alembert公式给出

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x + at) + \tilde{\varphi}(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi) d\xi \quad (2.31)$$

由于 $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$ 是 x 的奇函数,由Cauchy问题解的性质知道, $\tilde{u}(x, t)$ 也是奇函数,因此 $\tilde{u}|_{x=0} = 0$ 自动满足。其次,当 $x \geq 0$, $\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$, $\tilde{u}_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(x) = \psi(x)$, 函数 $\tilde{u}(x, t)$ 满足问题(2.28)的方程,边界条件和初始条件。因此,当 $x \geq 0$ 时,由(2.31)所给出的函数 $\tilde{u}(x, t)$ 确实是问题(2.28)的解 $u(x, t)$ 。然而,(2.31)的函数 $\tilde{u}(x, t)$ 是由 $\tilde{\varphi}(x)$ 和 $\tilde{\psi}(x)$ 来表示的。我们希望得到由 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 所表示的解的形式。下面分两种情况来讨论。

(1) 当 $x \geq at$ 时,由于 $x - at \geq 0$,由(2.31)得解的表达式为

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \quad (2.32)$$

(2) 当 $0 \leq x < at$ 时,由于 $x - at < 0$,即 $at - x > 0$,由(2.31)得

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t) = u^{(1)}(x, t) + u^{(2)}(x, t)$$

其中

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x, t) &= \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x + at) + \tilde{\varphi}(x - at)] \\ &= \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x + at) + \tilde{\varphi}(at - x)] \\ &= \frac{1}{2}[\varphi(x + at) - \varphi(at - x)] \\ u^{(2)}(x, t) &= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi) d\xi = u^{(2,1)}(x, t) + u^{(2,2)}(x, t) \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} u^{(2,1)}(x,t) &= \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \tilde{\psi}(\xi) d\xi = \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi \\ u^{(2,2)}(x,t) &= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^0 \tilde{\psi}(\eta) d\eta \end{aligned}$$

对于 $u^{(2,2)}(x,t)$ 中的积分, 令 $\xi = -\eta$, 则得

$$\begin{aligned} u^{(2,2)}(x,t) &= -\frac{1}{2a} \int_{at-x}^0 \tilde{\psi}(-\xi) d\xi = -\frac{1}{2a} \int_{at-x}^0 -\tilde{\psi}(\xi) d\xi \\ &= -\frac{1}{2a} \int_0^{at-x} \tilde{\psi}(\xi) d\xi = -\frac{1}{2a} \int_0^{at-x} \psi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

\therefore

$$u^{(2)}(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi - \frac{1}{2a} \int_0^{at-x} \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

最终有

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [\varphi(x+at) - \varphi(at-x)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \quad (2.33)$$

对于左端为自由端的半无界弦的自由振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (x > 0, t > 0) \\ u_x|_{x=0} = 0, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) & (x \geq 0) \end{cases} \quad (2.34)$$

利用偶延拓的方法, 可求得解的表达式。(见习题2.1)

2.1.2 无界弦的强迫振动, 齐次化原理

1. 一维非齐次波动方程的Cauchy问题的解

由叠加原理, 一维非齐次波动方程Cauchy问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & (t > 0, -\infty < x < \infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) & (-\infty < x < \infty) \end{cases} \quad (2.35)$$

的解为 $u(x,t) = u^{(1)}(x,t) + u^{(2)}(x,t)$, 其中 $u^{(1)}(x,t)$ 和 $u^{(2)}(x,t)$ 分别是定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}^{(1)} - a^2 u_{xx}^{(1)} = 0, & (t > 0, -\infty < x < \infty) \\ u^{(1)}|_{t=0} = \varphi(x), u_t^{(1)}|_{t=0} = \psi(x) & (-\infty < x < \infty) \end{cases} \quad (2.36)$$

和定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}^{(2)} - a^2 u_{xx}^{(2)} = f(x,t), & (t > 0, -\infty < x < \infty) \\ u^{(2)}|_{t=0} = 0, u_t^{(2)}|_{t=0} = 0 & (-\infty < x < \infty) \end{cases} \quad (2.37)$$

的解。问题(2.36)的解可由d'Alembert公式给出。问题(2.37)的解为

$$u^{(2)}(x, t) = \int_0^t w(x, t; \tau) d\tau \quad (2.38)$$

其中 $w(x, t; \tau)$ 是下面含参数 τ 的一维齐次波动方程的解,

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0, & (t > \tau, -\infty < x < \infty) \\ w|_{t=\tau} = 0, w_t|_{t=\tau} = f(x, \tau), & (-\infty < x < \infty) \end{cases} \quad (2.39)$$

问题(2.39)在 $t = \tau$ 时给出初始条件, 求 $t > \tau$ 时的解, 其中右端项和 $t = \tau$ 时的初始位移都等于零, $t = \tau$ 时的初始速度取为原问题(2.37)方程右端 $t = \tau$ 时的值 $f(x, \tau)$ 。在证明由(2.38)给出的 $u^{(2)}(x, t)$ 是问题(2.37)的解之前, 先复习一下含参变量积分的求导公式。由高等数学知识知道, 对于由含参变量积分所定义的函数

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x, y) dy$$

成立

$$F'(x) = \beta'(x)G(x, \beta(x)) - \alpha'(x)G(x, \alpha(x)) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} dy$$

下面证明由(2.38)给出的 $u^{(2)}(x, t)$ 确实是问题(2.37)的解。首先, 由(2.38)可得 $u^{(2)}|_{t=0} = 0$ 。这样, (2.37)的第一个初始条件得到满足。其次, 由含参变量积分的求导法则得

$$u_t^{(2)} = w(x, t; \tau)|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial w(x, t; \tau)}{\partial t} d\tau$$

由(2.39)的第一个初始条件得 $w(x, t; \tau)|_{\tau=t} = 0$, 故

$$u_t^{(2)} = \int_0^t \frac{\partial w(x, t; \tau)}{\partial t} d\tau \quad (2.40)$$

因此, $u_t^{(2)}|_{t=0} = 0$, (2.37)的第二个初始条件得到满足。最后, 对(2.40)关于 t 求导得

$$u_{tt}^{(2)} = \frac{\partial w(x, t; \tau)}{\partial t} \Big|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial^2 w(x, t; \tau)}{\partial t^2} d\tau$$

利用问题(2.39)的方程和第二个初始条件得

$$u_{tt}^{(2)} = f(x, t) + a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w(x, t; \tau)}{\partial x^2} d\tau = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\int_0^t w(x, t; \tau) d\tau \right] + f(x, t) = a^2 u_{xx}^{(2)} + f(x, t) \quad (2.41)$$

问题(2.37)的方程得到满足。由于(2.38)右端的积分上下限不含有参数 x , 此积分关于 x 求导直接等于被积函数关于 x 求导后的积分, 因此(2.41)的最后一个等式成立。

接下来, 我们求解问题(2.39)。为此, 令 $t' = t - \tau$, 则有 $w_{t'} = w_t$, $w_{t't'} = w_{tt}$, 故(2.39)化为

$$\begin{cases} w_{t't'} - a^2 w_{xx} = 0, & (t' > 0, -\infty < x < \infty) \\ w|_{t'=0} = 0, w_t|_{t'=0} = f(x, \tau), & (-\infty < x < \infty) \end{cases} \quad (2.42)$$

由d'Alembert公式可得

$$w = \frac{1}{2a} \int_{x-at'}^{x+at'} f(\xi, \tau) d\xi - \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi$$

最后, 由问题(2.36)的d'Alembert公式及(2.38)可得原问题(2.35)的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (2.43)$$

由(2.43)可知, 若 $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x, t)$ 是 x 的奇(偶, 周期为 l)函数, 则解 $u(x, t)$ 也是 x 的奇(偶, 周期为 l)的函数。

2. 齐次化原理

我们把通过求解含参数 τ 的齐次方程的定解问题(2.39)的解而得到非齐次方程定解问题(2.37)的解(2.38)的求解过程称为齐次化原理。对于波动方程来说齐次化原理等价于力学上的动量定理(参见复旦大学数学系编, 人民教育出版社1979年出版的《数学物理方程》)。齐次化原理不仅适用于一维波动方程的Cauchy问题, 还适用于各种维数的波动方程和热传导方程的Cauchy问题及齐次边界条件的混合问题; 不仅适用于线性偏微分方程的初值问题, 还适用于各种阶数的线性常微分方程的初值问题, 是一种求解非齐次线性微分方程初值问题的一个有力工具。

3. 半无界弦的强迫振动问题

为了求解左端固定的半无界弦的强迫振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (x > 0, t > 0) \\ u|_{x=0} = 0, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), & (x \geq 0) \end{cases} \quad (2.44)$$

我们首先对 $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 关于 x 进行奇延拓,

$$\tilde{f}(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & x \geq 0 \\ -f(-x, t), & x < 0 \end{cases}, \tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases}, \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

然后再构造Cauchy问题

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - a^2 \tilde{u}_{xx} = \tilde{f}(x, t), & (t > 0, -\infty < x < \infty) \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x), \tilde{u}_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(x), & (-\infty < x < \infty) \end{cases} \quad (2.45)$$

由于 $\tilde{f}(x, t)$, $\tilde{\varphi}(x)$ 和 $\tilde{\psi}(x)$ 是 x 的奇函数, 故 $\tilde{u}(x, t)$ 也是 x 的奇函数, $\tilde{u}|_{x=0}$ 的条件自动满足。另外, 当 $x \geq 0$ 时, $\tilde{u}(x, t)$ 满足定解问题(2.44)中的方程和初始条件, 因此当 $x \geq 0$ 时, 问题(2.45)的解

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}(x+at) + \tilde{\varphi}(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi \quad (2.46)$$

就是问题(2.44)的解 $u(x, t)$ 。下面分两种情况来讨论。

- (1) 当 $x \geq at$ 时, 由于 $x - at \geq 0$, $\tilde{\varphi}(x \pm at) = \varphi(x \pm at)$; 当 $\xi \in [x - at, x + at]$ 时, $\tilde{\psi}(\xi) = \psi(\xi)$; 当 $\xi \in [x - a(t - \tau), x + a(t - \tau)]$ 时, $\tilde{f}(\xi, \tau) = f(\xi, \tau)$, 故此时 $u(x, t)$ 的表达式(2.46)就化为表达式(2.43)。
- (2) 当 $0 < x < at$ 时, 由于 $x - at < 0$, 即 $at - x > 0$, 由(2.46), 并利用半无界弦的自由振动问题的结果(2.33)得

$$u(x, t) = u^{(1)}(x, t) + u^{(2)}(x, t)$$

其中

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x, t) &= \frac{1}{2} [\varphi(x + at) - \varphi(at - x)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \\ u^{(2)}(x, t) &= \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi \end{aligned}$$

注意到当 $\tau \geq t - \frac{x}{a}$ 时, $x - a(t - \tau) \geq 0$; 当 $0 \leq \tau < t - \frac{x}{a}$ 时, $x - a(t - \tau) < 0$, 因此,

$$u^{(2)}(x, t) = u^{(2,1)}(x, t) + u^{(2,2)}(x, t)$$

其中

$$\begin{aligned} u^{(2,1)}(x, t) &= \frac{1}{2a} \int_{t-\frac{x}{a}}^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \\ u^{(2,2)}(x, t) &= \frac{1}{2a} \int_0^{t-\frac{x}{a}} d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi = u^{(2,2,1)}(x, t) + u^{(2,2,2)}(x, t) \end{aligned}$$

上式中的

$$\begin{aligned} u^{(2,2,1)}(x, t) &= \frac{1}{2a} \int_0^{t-\frac{x}{a}} d\tau \int_0^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \\ u^{(2,2,2)}(x, t) &= \frac{1}{2a} \int_0^{t-\frac{x}{a}} d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^0 \tilde{f}(\eta, \tau) d\eta \\ &\stackrel{\substack{\xi=-\eta \\ \eta=-\xi}}{=} -\frac{1}{2a} \int_0^{t-\frac{x}{a}} d\tau \int_{a(t-\tau)-x}^0 \tilde{f}(-\xi, \tau) d\xi \\ &= -\frac{1}{2a} \int_0^{t-\frac{x}{a}} d\tau \int_0^{a(t-\tau)-x} f(\xi, \tau) d\xi \end{aligned}$$

\therefore

$$\begin{aligned} u^{(2,2)}(x, t) &= u^{(2,2,1)}(x, t) + u^{(2,2,2)}(x, t) \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{t-\frac{x}{a}} \left[\int_0^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi - \int_0^{a(t-\tau)-x} f(\xi, \tau) d\xi \right] d\tau \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{t-\frac{x}{a}} d\tau \int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \end{aligned}$$

∴

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{2} [\varphi(x + at) - \varphi(at - x)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \\
&\quad + \frac{1}{2a} \int_{t-\frac{x}{a}}^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \\
&\quad + \frac{1}{2a} \int_0^{t-\frac{x}{a}} d\tau \int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi
\end{aligned} \tag{2.47}$$

对于左端为自由端的半无界弦的强迫振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (x > 0, t > 0) \\ u_x|_{x=0} = 0, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), & (x \geq 0) \end{cases} \tag{2.48}$$

利用偶延拓办法可得到解的表达式（见习题2.1）

对于左端满足第一类非齐次边界条件的无界弦的强迫振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (x > 0, t > 0) \\ u|_{x=0} = g(t), & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), & (x \geq 0) \end{cases} \tag{2.49}$$

我们有两种解法。第一种解法是令 $v(x, t) = u(x, t) - g(t)$ ，则 $v(x, t)$ 满足

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x, t) - g''(t), & (x > 0, t > 0) \\ v|_{x=0} = 0, & (t \geq 0) \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - g(0), v_t|_{t=0} = \psi(x) - g'(0), & (x \geq 0) \end{cases} \tag{2.50}$$

问题(2.50)是一个左端满足第一类齐次边界条件的半无界问题，故可用前述的奇延拓方法求解。第二种解法是利用叠加原理，问题(2.49)的解可表示为 $u(x, t) = u^{(1)}(x, t) + u^{(2)}(x, t)$ ，其中 $u^{(1)}(x, t)$ 和 $u^{(2)}(x, t)$ 分别是下面两个定解问题的解，

$$\begin{cases} u^{(1)}_{tt} - a^2 u^{(1)}_{xx} = f(x, t), & (x > 0, t > 0) \\ u^{(1)}|_{x=0} = 0, & (t \geq 0) \\ u^{(1)}|_{t=0} = \varphi(x), u^{(1)}_t|_{t=0} = \psi(x), & (x \geq 0) \end{cases} \tag{2.51}$$

$$\begin{cases} u^{(2)}_{tt} - a^2 u^{(2)}_{xx} = 0, & (x > 0, t > 0) \\ u^{(2)}|_{x=0} = g(t), & (t \geq 0) \\ u^{(2)}|_{t=0} = u^{(2)}_t|_{t=0} = 0, & (x \geq 0) \end{cases} \tag{2.52}$$

问题(2.51)的解可由(2.47)给出。问题(2.52)的解可用d'Alembert方法求出，或用后面将要讲到的Laplace变换方法求得。这里讲一下d'Alembert解法。因 $u^{(2)}(x, t)$ 满足一维齐次波动方程，它在区域 $x \geq at$ 上的值完全被正实轴 $x \geq 0$ 上的初始条件所决定（正

实轴 $x \geq 0$ 的决定区域就是 $x \geq at$). 由于在正实轴 $x \geq 0$ 上, $u^{(2)} = u^{(2)}_t = 0$, 故在 $x \geq at$ 上, $u^{(2)}(x, t) \equiv 0$, 特别, $u^{(2)}|_{x=at} = 0$. 由于 $u^{(2)}(x, t)$ 在 $0 \leq x \leq at$ 中满足边界条件 $u^{(2)}|_{x=0} = g(t)$, $u^{(2)}|_{x=at} = 0$, 由达布问题(2.18)、(2.19)的解的表达式(2.27)得

$$u^{(2)}(x, t) = g\left(t - \frac{x}{a}\right), \quad \text{当 } 0 \leq x \leq at \quad (2.53)$$

对于左端满足非齐次第二类边界条件的半无界弦的强迫振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (x > 0, t > 0) \\ u_x|_{x=0} = g(t), & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), & (x \geq 0) \end{cases} \quad (2.54)$$

也有两种解法. 第一种解法是令 $v(x, t) = u(x, t) - g(t)x$, 则 $v(x, t)$ 满足

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x, t) - g''(t), & (x > 0, t > 0) \\ v_x|_{x=0} = 0, & (t \geq 0) \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - g(0)x, v_t|_{t=0} = \psi(x) - g'(0)x, & (x \geq 0) \end{cases} \quad (2.55)$$

问题(2.55)的解可用偶延拓方法求得. 第二种解法是利用叠加原理, 问题(2.54)的解可表示为 $u(x, t) = u^{(1)}(x, t) + u^{(2)}(x, t)$, 其中 $u^{(1)}(x, t)$ 和 $u^{(2)}(x, t)$ 分别是下面两个定解问题的解,

$$\begin{cases} u^{(1)}_{tt} - a^2 u^{(1)}_{xx} = f(x, t), & (x > 0, t > 0) \\ u^{(1)}_x|_{x=0} = 0, & (t \geq 0) \\ u^{(1)}|_{t=0} = \varphi(x), u^{(1)}_t|_{t=0} = \psi(x), & (x \geq 0) \end{cases} \quad (2.56)$$

$$\begin{cases} u^{(2)}_{tt} - a^2 u^{(2)}_{xx} = 0, & (x > 0, t > 0) \\ u^{(2)}_x|_{x=0} = g(t), & (t \geq 0) \\ u^{(2)}|_{t=0} = u^{(2)}_t|_{t=0} = 0, & (x \geq 0) \end{cases} \quad (2.57)$$

问题(2.56)的解可用偶延拓方法求得. 问题(2.57)的解可用d'Alembert方法或Laplace变换方法求得, 这里就不详细讨论了.

习题2.1

1. 用d'Alembert公式写出下面一维齐次波动方程的解的表达式:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (t > 0, -\infty < x < \infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

其中

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}, \quad \psi(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$$

2. 用d'Alembert方法求解下面的达布问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (t > 0, 0 < x < at) \\ u_x|_{x=0} = \varphi(t), u|_{x=at} = \psi(t) & (t \geq 0) \end{cases}$$

3. 用偶延拓的方法求解下面的半无界问题

$$(1) \quad \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (x > 0, t > 0) \\ u_x|_{x=0} = 0, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (x > 0, t > 0) \\ u_x|_{x=0} = 0, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

§2.2 高维波动方程Cauchy问题的解

2.2.1 三维波动方程Cauchy问题的解

1. 初始位移为零的三维齐次波动方程Cauchy问题的解

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \nabla^2 u = 0, & (t > 0, -\infty < x, y, z < \infty) \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z), & (-\infty < x, y, z < \infty) \end{cases} \quad (2.58)$$

其中, $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ 为三维Laplace算子。用后面要解讲的Fourier变换方法(参见复旦大学数学系编, 人民教育出版社1979年出版的《数学物理方程》)或用平均值方法(参见汪德新编, 华中科技大学出版社2001年出版的《数学物理方法》)可得问题(2.58)的解为

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}^M} \psi(\xi, \eta, \zeta) dS \quad (2.59)$$

其中 S_{at}^M 是以 $M(x, y, z)$ 为中心, at 为半径的球面, 即

$$S_{at}^M: (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = a^2 t^2$$

在球面 S_{at}^M 上引进坐标变换

$$\begin{cases} \xi = x + at \sin \varphi \cos \theta \\ \eta = y + at \sin \varphi \sin \theta \\ \zeta = z + at \cos \varphi \end{cases}$$

则(2.59)可写成

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \psi(x + at \sin \varphi \cos \theta, y + at \sin \varphi \sin \theta, z + at \cos \varphi) a^2 t^2 \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \psi(x + at \sin \varphi \cos \theta, y + at \sin \varphi \sin \theta, z + at \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (2.60) \end{aligned}$$

2. 一般情况下, 三维波动方程Cauchy问题的解

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \nabla^2 u = f(x, y, z, t), & (t > 0, -\infty < x, y, z < \infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z), & (-\infty < x, y, z < \infty) \end{cases} \quad (2.61)$$

由叠加原理知, 问题(2.61)的解可以表示为

$$u(x, y, z, t) = u^{(1)}(x, y, z, t) + u^{(2)}(x, y, z, t) + u^{(3)}(x, y, z, t)$$

其中 $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ 和 $u^{(3)}$ 分别是下面三个定解问题的解,

$$\begin{cases} u^{(1)}_{tt} - a^2 \nabla^2 u^{(1)} = 0, & (t > 0, -\infty < x, y, z < \infty) \\ u^{(1)}|_{t=0} = 0, u^{(1)}_t|_{t=0} = \psi(x, y, z), & (-\infty < x, y, z < \infty) \end{cases} \quad (2.62)$$

$$\begin{cases} u^{(2)}_{tt} - a^2 \nabla^2 u^{(2)} = 0, & (t > 0, -\infty < x, y, z < \infty) \\ u^{(2)}|_{t=0} = \varphi(x, y, z), u^{(2)}_t|_{t=0} = 0, & (-\infty < x, y, z < \infty) \end{cases} \quad (2.63)$$

$$\begin{cases} u^{(3)}_{tt} - a^2 \nabla^2 u^{(3)} = f(x, y, z, t), & (t > 0, -\infty < x, y, z < \infty) \\ u^{(3)}|_{t=0} = u^{(3)}_t|_{t=0} = 0, & (-\infty < x, y, z < \infty) \end{cases} \quad (2.64)$$

问题(2.62)的解可由公式(2.60)给出. 问题(2.63)的解 $u^{(2)} = v_t$, 其中 $v(x, y, z, t)$ 是下面定解问题的解,

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 \nabla^2 v = 0, & (t > 0, -\infty < x, y, z < \infty) \\ v|_{t=0} = 0, v_t|_{t=0} = \varphi(x, y, z), & (-\infty < x, y, z < \infty) \end{cases} \quad (2.65)$$

首先, 因 v 满足三维齐次波动方程, 故 $u^{(2)} = v_t$ 也满足三维齐次波动方程,

$$u^{(2)}_{tt} - a^2 \nabla^2 u^{(2)} = (v_t)_{tt} - a^2 \nabla^2 v_t = \frac{\partial}{\partial t}(v_{tt} - a^2 \nabla^2 v) = 0$$

其次, 由问题(2.65)的第二个初始条件得

$$u^{(2)}|_{t=0} = v_t|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad (-\infty < x, y, z < \infty)$$

即 $u^{(2)}$ 满足问题(2.63)的第一个初始条件. 最后, 由于 v 满足三维齐次波动方程及问题(2.64)的第一个初始条件, 故有

$$u^{(2)}_t|_{t=0} = v_{tt}|_{t=0} = a^2 \nabla^2 v|_{t=0} = a^2 \nabla^2 (v|_{t=0})$$

即 $u^{(2)}$ 满足问题(2.63)的第二个初始条件。把(2.60)中的 ψ 换成 φ , 就可得到问题(2.65)的解, 从而就可得到问题(2.63)的解 $u^{(2)} = v_t$ 。

由齐次化原理, 问题(2.64)的解可写成

$$u^{(3)}(x, y, z, t) = \int_0^t w(x, y, z, t; \tau) d\tau \quad (2.66)$$

其中 $w(x, y, z, t; \tau)$ 是下面含参数 τ 的定解问题的解,

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 \nabla^2 w = 0, & (t > \tau, -\infty < x, y, z < \infty) \\ w|_{t=\tau} = 0, w_t|_{t=\tau} = f(x, y, z, \tau), & (-\infty < x, y, z < \infty) \end{cases} \quad (2.67)$$

令 $t' = t - \tau$, 注意到 $w_{t'} = w_t$, $w_{t't'} = w_{tt}$, 可得 w 满足下面定解问题

$$\begin{cases} w_{t't'} - a^2 \nabla^2 w = 0, & (t' > \tau, -\infty < x, y, z < \infty) \\ w|_{t'=0} = 0, w_{t'}|_{t'=0} = f(x, y, z, \tau), & (-\infty < x, y, z < \infty) \end{cases} \quad (2.68)$$

利用问题(2.58)的求解公式(2.60)可得问题(2.68)的解

$$\begin{aligned} w &= \frac{t'}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi f(x + at' \sin \varphi \cos \theta, y + at' \sin \varphi \sin \theta, z + at' \cos \varphi, \tau) \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{t - \tau}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi f(x + a(t - \tau) \sin \varphi \cos \theta, y + a(t - \tau) \sin \varphi \sin \theta, \\ &\quad z + a(t - \tau) \cos \varphi, \tau) \sin \varphi d\varphi \end{aligned}$$

由以上问题最终可得到问题(2.61)的解为

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \psi(x + at \sin \varphi \cos \theta, y + at \sin \varphi \sin \theta, z + at \cos \varphi, \tau) \sin \varphi d\varphi \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \varphi(x + at \sin \varphi \cos \theta, y + at \sin \varphi \sin \theta, z + at \cos \varphi, \tau) \sin \varphi d\varphi \right\} \\ &\quad + \int_0^t \frac{t - \tau}{4\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi f(x + a(t - \tau) \sin \varphi \cos \theta, y + a(t - \tau) \sin \varphi \sin \theta, \\ &\quad z + a(t - \tau) \cos \varphi, \tau) \sin \varphi d\varphi \end{aligned} \quad (2.69)$$

2.2.2 二维波动方程Cauchy问题的解

我们可以把二维波动方程的Cauchy问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x, y, t), & (t > 0, -\infty < x, y < \infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y), u_t|_{t=0} = \psi(x, y), & (-\infty < x, y < \infty) \end{cases} \quad (2.70)$$

看成一个三维波动方程的Cauchy问题, 只不过其中的函数 f, φ, ψ 与 z 无关。利用三维波动方程的求解公式(2.69), 并求出解的表达式中关于 z 方向的积分, 可得二维波动方

程Cauchy问题(2.70)的求解公式(此方法称为降维法, 参见复旦大学数学系编, 人民教育出版社1979年出版的《数学物理方程》)。

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) = & \frac{1}{2\pi a} \int_0^{at} r dr \int_0^{2\pi} \frac{\psi(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta)}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} d\theta \\
 & + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2\pi a} \int_0^{at} r dr \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta)}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} d\theta \right\} \\
 & + \int_0^t \frac{d\tau}{2\pi a} \int_0^{a(t-\tau)} r dr \int_0^{2\pi} \frac{f(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta)}{\sqrt{a^2 (t-\tau)^2 - r^2}} d\theta \quad (2.71)
 \end{aligned}$$

习题2.2

利用叠加原理和一维波动方程的求解公式, 写出下面的三维波动方程Cauchy问题解的表达式,

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f_1(x, t) + f_2(z, t), & (t > 0, -\infty < x, y, z < \infty) \\ u|_{t=0} = \varphi_1(x) + \varphi_2(y), u_t|_{t=0} = \psi_1(x) + \psi_2(z), & (-\infty < x, y, z < \infty) \end{cases}$$

第三章 分离变量法，微分方程的特征值和特征函数

§3.1 齐次线性方程，齐次边界条件问题的分离变量解法

3.1.1 有界弦的自由振动，分离变量法

1. 分离变量法

现在我们设法求解两端固定弦的自由振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (t > 0, 0 < x < l) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.1)$$

(3.1)是一个齐次方程和齐次边界条件问题，由叠加原理知，满足方程和边界条件的特解的任意线性组合也满足方程和边界条件。这为我们提供了求解问题(3.1)的一个机会：先设法求出满足问题(3.1)的方程和边界条件的一些线性无关特解，然后把问题(3.1)的解表示成这些特解的线性组合，最后适当选择线性组合的系数，使(3.1)的初始条件得到满足。 $u \equiv 0$ 总能满足(3.1)的方程和边界条件，我们称它为平凡解。平凡解与其它任何解线性相关，它对我们求解问题(3.1)没有用处，因此，我们只对那些非平凡解感兴趣。那么，我们应该求什么形式的非平凡解呢？答案是求能写成 $X(x)$ 与 $T(t)$ 乘积形成的特解（称变量可分离形式的特解），因为这种形式的特解可通过求解常微分方程问题得到。

下面求出满足问题(3.1)的方程和边界条件的变量可分离形式的非平凡特解。以 $u = X(x)T(t)$ 代入(3.1)中的方程得

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

由于 $u = X(x)T(t) \neq 0$ ，故 $X(x) \neq 0$ ， $T(t) \neq 0$ 。上式两边同除以 $a^2 X(x)T(t)$ ，得

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

上式左边为 t 的函数, 右边为 x 的函数, 要它们相等, 只有它们都等于某常数 $-\lambda$,

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (3.2)$$

其次, 由(3.1)的边界条件 $u|_{x=0} = X(0)T(t) = 0$ 推得 $X(0) = 0$ (否则, 若 $T(t) \equiv 0$, 则会导致 $u = X(x)T(t) \equiv 0$, 与非平凡解假设矛盾)。类似的, 由 $u|_{x=l} = 0$ 可推得 $X(l) = 0$ 。综合(3.2)及以上的讨论, 可得

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

$$(3.5)$$

其中, λ 是一个待定的常数。(3.4)、(3.5)是一个含待定常数 λ 的二阶齐次线性常微分方程满足齐次边界条件的边值问题, 对一般的 λ 而言, 它只有平凡解 (零解)。但对某些特殊的 λ , 它可能有非零解, 我们把使问题(3.4)、(3.5)有非零解的 λ 值称为特征值, 对应的非零解称为特征函数。我们把求(3.4)、(3.5)特征值和特征函数的问题称为常微分方程的特征值问题, 又称为常微分方程的本征值问题 (eigenvalue problem)。下面, 我们求解常微分方程的特征值问题。为此, 对 λ 不同的取值范围, 研究问题(3.4)、(3.5)存在非零解的可能性。

当 $\lambda < 0$ 时, 方程(3.4)的通解为

$$X(x) = c_1 \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}x)$$

由 $X(0) = 0$ 得 $c_1 = 0$; 由 $X(l) = c_2 \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}l) = 0$ 得 $c_2 = 0$, 故此时只有平凡解。

当 $\lambda = 0$ 时, 方程(3.4)的通解为

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

由 $X(0) = 0$ 得 $c_1 = 0$; 由 $X(l) = c_2 l = 0$ 得 $c_2 = 0$, 此时也只有平凡解。

当 $\lambda > 0$ 时, 方程(3.4)的通解为

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

由 $X(0) = 0$ 得 $c_1 = 0$; 由 $X(l) = 0$ 得

$$c_2 \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$$

由于是求非平凡解, $c_2 \neq 0$ 。因此, 要上式成立, λ 必须满足

$$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0, \quad \sqrt{\lambda}l = n\pi, \quad \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

因此只有当

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

时, 问题(3.4)、(3.5)才可能有非平凡解 $c_2 \sin \frac{n\pi x}{l}$, 即特征函数可相差任一非零常数因子 c_2 。由于我们最终利用的是非平凡特解的线性组合, 故为了确定起见, 可取 $c_2 = 1$, 这样便得到特征值 λ_n 对应的特征函数

$$X = X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

把 $\lambda = \lambda_n$ 代入方程(3.3), 得

$$T''(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} T(t) = 0 \quad (3.8)$$

方程(3.8)的通解为

$$T = T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

故满足问题(3.1)的方程和边界条件的变量可分离形式特解的一般形式是 $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$, 因此, 问题(3.1)的解可以表示为这些特解的叠加,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.10)$$

上式两边关于 t 求导得

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} \left(-A_n \sin \frac{n\pi at}{l} + B_n \cos \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

利用(3.9)、(3.10)以及(3.1)的初始条件可得

$$\varphi(x) = u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.11)$$

$$\psi(x) = u_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.12)$$

注意到特征函数全体 $\{\sin \frac{n\pi x}{l}\}, n = 1, 2, \dots$ 构成区间 $[0, l]$ 上的正交函数系,

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{l}{2}, & n = m \end{cases} \quad (3.13)$$

由(3.11)、(3.12)知, A_n 和 $\frac{n\pi a}{l} B_n$ 分别是 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 按此正交函数系进行Fourier展开的第 n 项的系数 $\tilde{\varphi}(x)$ 和 $\tilde{\psi}(x)$, 故(3.10)式中的系数 A_n 和 B_n 分别为

$$A_n = \tilde{\varphi}(x) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$B_n = \frac{l}{n\pi a} \tilde{\psi}(x) = \frac{l}{n\pi a} \cdot \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

这样, 问题(3.1)的求解工作就全部完成了。可以证明, 当 $\varphi(x) \in C^3[0, l]$, $\psi(x) \in C^2[0, l]$ 时, (3.10)给出的确实是问题(3.1)的解。当 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的光滑型不是很高时, 由(3.10)给出的仍然是具有物理意义的广义解。

从上面的例子可以看出, 分离变量法只能用于求解齐次方程、齐次边界条件问题, 其求解过程分为如下三步。

第一步 分离变量。为求变量可分离的特解, 以 $u = X(x)T(t)$ 代入(3.1)中的方程和边界条件, 得到 $T(t)$ 所满足的方程(3.3)和 $X(x)$ 所满足的方程和边界条件(3.4)、(3.5)。这时, 我们称问题(3.1)是变量可分离的 (包括方程和边界条件都是变量可分离的)。这一步是分离变量法的前提。这一步做不到, 分离变量法就无从谈起。

第二步 解常微分方程的特征值问题(3.4)、(3.5), 得特征值 λ_n 和对应的特征函数 $X_n(x)$, 代入方程(3.3), 得到 $T_n(t)$ 。于是可得变量可分离特解的一般形式 $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$)。然后把问题(3.1)的解表示成这些变量可分离特解的叠加。这一步是分离变量法的主要工作量所在。

第三步 由(3.1)的初始条件确定叠加式(3.10)中的待定系数。这一步是完成求解工作所不可缺少的一部分。

2. 驻波和驻波法

由以上分析知道, 有界弦的自由振动问题(3.1)的解是由下面一系列变量可分离特解叠加而成的,

$$u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x) = \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

对于某个固定的 n , 我们研究 $u_n(x, t)$ 的特性。

(1) 在某个固定时刻 $t = t_0$, 看振动弦的形状, 它是一个正弦波的波形

$$T_n(t_0) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

其波幅为 $|T_n(t_0)|$; 在 $\frac{l}{n}$ 的整数倍的点 $x = m \cdot \frac{l}{n}$ 上, 弦的位移始终为零, 我们称这种点为波节; 在 $\frac{l}{n}$ 的半整数倍的点 $x = (m + \frac{1}{2})\frac{l}{n}$ 上, 弦的位移达到最大值, 我们称这种点为波腹。从不同时刻看, $u_n(x, t)$ 的波形始终保持不变, 仅波的幅度不同而已。我们称这种波为驻波。因此问题(3.1)的解可以表示为一系列驻波的叠加, 故分离变量法又称为驻波法。

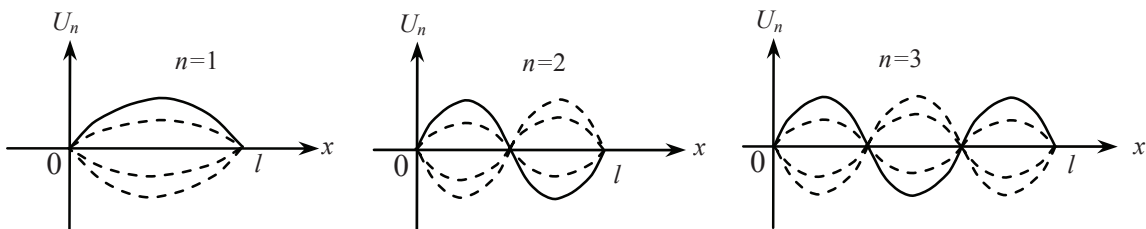


图 3.1: 驻波

(2) 对固定的 $x = x_0$, 看弦上某固定点的运动情况。记 $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$, 则

$$\begin{aligned} u_n(x_0, t) &= (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi x_0}{l} \\ &= C_n X_n(x_0) \sin(\omega_n t + \delta_n) \end{aligned} \quad (3.14)$$

其中 $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, δ_n 由下式确定,

$$\sin \delta_n = \frac{A_n}{C_n}, \quad \cos \delta_n = \frac{B_n}{C_n}$$

式(3.14)表示的是一个质点关于平衡位置沿垂直方向的简谐振动, 其振幅为 $|C_n X_n(x_0)|$, 频率为 ω_n (弦自由振动的固有频率), 相位角为 δ_n 。对弦上任何一点来说, $u_n(x, t)$ 所表示的简谐振动的频率和相位角都一样, 仅振幅不同而已。

3. 其他边界条件问题的分离变量法

(1) 左端为自由端, 右端为固定端的弦的自由振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (t > 0, 0 < x < l) \\ u_x|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.15)$$

以 $u = X(x)T(t)$ 代入(3.15)的方程和边界条件得

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} X'(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

当 $\lambda < 0$ 时, (3.17) 的解为 $X(x) = c_1 \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}x)$, 对 $X(x)$ 关于 x 求导得 $X'(x) = \sqrt{-\lambda} [c_1 \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}x)]$ 。由 $X'(0) = 0$ 得 $\sqrt{-\lambda}c_2 = 0$, 故 $c_2 = 0$; 由 $X(l) = 0$ 得 $c_1 \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}l) = 0$, 故 $c_1 = 0$, 此时只有平凡解。

当 $\lambda = 0$ 时, 方程(3.17)的解为 $X(x) = c_1 + c_2 x$, 由 $X'(0) = 0$ 得 $c_2 = 0$; 由 $X(l) = 0$ 得 $c_1 = 0$, 此时也只有非平凡解。

当 $\lambda > 0$ 时, 方程(3.17)的解为 $X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$, 求得 $X'(x) = \sqrt{\lambda} [-c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)]$ 。由 $X'(0) = 0$ 得 $\sqrt{\lambda}c_2 = 0$, 故 $c_2 = 0$; 由 $X(l) = 0$ 得 $c_1 \cos(\sqrt{\lambda}l) = 0$ 。由于非零解要求 $c_1 \neq 0$, 故必须

$$\cos(\sqrt{\lambda}l) = 0, \quad \sqrt{\lambda}l = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad \sqrt{\lambda} = \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

因此, 只有当 $\lambda = \lambda_n = \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{l^2}$ 时, 问题(3.17)、(3.18)才可能有非零解, 对应的特征函数可以取为 $X_n(x) = \cos \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$, ($n = 1, 2, \dots$)。把 λ_n 代入方程(3.16)得

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi a t}{l} + B_n \sin \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi a t}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

故问题(3.15)的解可以表示为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi at}{l} + B_n \sin \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi at}{l} \right] \cos \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi x}{l} \end{aligned} \quad (3.19)$$

把(3.19)代入(3.15)的初始条件得

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi x}{l} \quad (3.20)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi a}{l} B_n \cos \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi x}{l} \quad (3.21)$$

注意到

$$\int_0^l \cos \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi x}{l} \cos \frac{(m - \frac{1}{2}) \pi x}{l} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{l}{2}, & n = m \end{cases}$$

由(3.20)和(3.21)可得到解的表达式(3.19)中的待定系数

$$\begin{aligned} A_n &= \tilde{\varphi}_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi x}{l} dx \\ B_n &= \frac{l}{(n - \frac{1}{2}) \pi a} \tilde{\psi}_n = \frac{l}{(n - \frac{1}{2}) \pi a} \cdot \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \cos \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi x}{l} dx \end{aligned}$$

(2) 左端固定、右端为弹性支撑的弦的自由振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (t > 0, 0 < x < l) \\ u|_{x=0} = (u_x + \sigma u)|_{x=l} = 0, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.22)$$

上式中的常数 $\sigma > 0$ 。以 $u = X(x)T(t)$ 代入(3.22)中的方程和边界条件得

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (3.23)$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X'(l) + \sigma X(l) = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

$$(3.25)$$

当 $\lambda < 0$ 时, (3.24)的解为 $X(x) = c_1 \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}x)$, 由 $X(0) = 0$ 得 $c_1 = 0$, 故 $X(x) = c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$, $X'(x) = \sqrt{-\lambda}c_2 \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}x)$; 由 $X'(l) + \sigma X(l) = 0$ 得 $[\sqrt{-\lambda} \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}l) + \sigma \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}l)] c_2 = 0$, 故 $c_2 = 0$, 此时只有平凡解。

当 $\lambda = 0$ 时, 方程(3.24)的解为 $X(x) = c_1 + c_2 x$, 由 $X(0) = 0$ 得 $c_1 = 0$, 故 $X(x) = c_2 x$, $X'(x) = c_2$; 由 $X'(l) + \sigma X(l) = 0$ 得 $(1 + \sigma l)c_2 = 0$, 故 $c_2 = 0$, 此时也只有平凡解。

当 $\lambda > 0$ 时, 方程(3.24)的解为 $X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$ 。由 $X(0) = 0$ 得 $c_1 = 0$, 故 $X(x) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$, $X'(x) = \sqrt{\lambda}c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$; 由 $X'(l) + \sigma X(l) = 0$ 得

$c_2 [\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}l) + \sigma \sin(\sqrt{\lambda}l)] = 0$ 。由于非零解要求 $c_2 \neq 0$, 故 λ 必须满足

$$\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}l) + \sigma \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \quad (3.26)$$

令 $\xi = \sqrt{\lambda}l$, 则方程(3.26)化为

$$\tan \xi = -\frac{1}{\sigma l} \xi \quad (3.27)$$

方程(3.27)有无穷多个正根 ξ_1, ξ_2, \dots , 它们可用数值方法(如Newton迭代法)求得。因此问题(3.24)、(3.25)的特征值为 $\lambda = \lambda_n = \xi_n^2/l^2$, 对应的特征函数为 $X =$

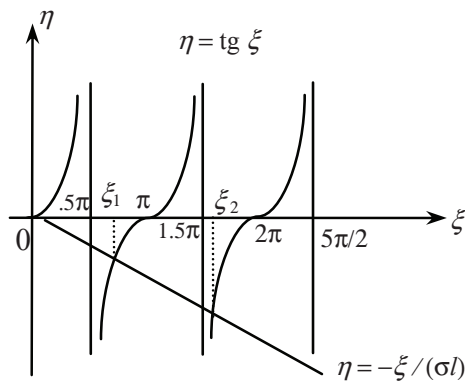


图 3.2: 方程(3.27)的正根

$X_n(x) = \sin \frac{\xi_n x}{l}$, ($n = 1, 2, \dots$)。把 $\lambda = \lambda_n$ 代入方程(3.23)可以求得解为

$$T = T_n(t) = A_n \cos \frac{\xi_n a t}{l} + B_n \sin \frac{\xi_n a t}{l}$$

故问题(3.22)的解可以表示为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\xi_n a t}{l} + B_n \sin \frac{\xi_n a t}{l} \right) \sin \frac{\xi_n x}{l} \quad (3.28)$$

把(3.28)代入(3.22)的初始条件得

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\xi_n x}{l} \quad (3.29)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n a}{l} B_n \sin \frac{\xi_n x}{l} \quad (3.30)$$

由后面将会讲到的常微分方程特征值问题的一般理论知道, 特征函数 $\{X_n(x)\}$ 一定构成区间 $[0, l]$ 上的正交函数系, 故由(3.29)、(3.30)可得到解的表达式(3.28)中的

待定系数为

$$\begin{aligned} A_n &= \tilde{\varphi}_n = \frac{1}{\rho_n} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\xi_n x}{l} dx \\ B_n &= \frac{l}{\xi_n a} \tilde{\psi}_n = \frac{l}{\xi_n a} \frac{1}{\rho_n} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\xi_n x}{l} dx \end{aligned}$$

其中

$$\rho_n = \int_0^l \sin^2 \frac{\xi_n x}{l} dx$$

3.1.2 其他定解问题的分离变量法

1. 热传导方程混合问题的分离变量法

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & (t > 0, 0 < x < l) \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x). & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.31)$$

以 $u = X(x)T(t)$ 代入问题(3.31)的方程和边界条件得

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (3.32)$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

当 $\lambda < 0$ 时, (3.33) 的解为 $X(x) = c_1 \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}x)$, 求导得 $X'(x) = \sqrt{-\lambda} [c_1 \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}x)]$. 由 $X'(0) = 0$ 得 $\sqrt{-\lambda}c_2 = 0$, 故 $c_2 = 0$; 由 $X'(l) = 0$ 得 $\sqrt{-\lambda}c_1 \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}l) = 0$, 故 $c_1 = 0$. 此时只有平凡解.

当 $\lambda = 0$ 时, (3.33) 的解为 $X(x) = c_1 + c_2 x$, 由 $X'(0) = 0$, $X'(l) = 0$ 得 $c_2 = 0$, 非零常数为问题的非零解. 因此, $\lambda = \lambda_0 = 0$ 为特征值, 对应的特征函数可以取为 $X = X_0(x) = 1$. 把 $\lambda = 0$ 代入(3.32), 可以求得其解为 $T = T_0(t) = A_0$, 故对应于特征值 $\lambda = 0$ 的变量可分离特解为

$$u = u_0(x, t) = X_0(x)T_0(t) = A_0 \quad (3.35)$$

当 $\lambda > 0$ 时, (3.33) 的解为 $X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$, 求导得 $X'(x) = \sqrt{\lambda} [-c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)]$. 由 $X'(0) = 0$ 得 $\sqrt{\lambda}c_2 = 0$, 故 $c_2 = 0$; 由 $X'(l) = 0$ 得 $c_1 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$. 由于非零解要求 $c_1 \neq 0$, 故必须满足

$$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0, \quad \sqrt{\lambda}l = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

故得特征值 $\lambda = \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$, 对应的特征函数可以取为 $X = X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}$, ($n = 1, 2, \dots$). 把 $\lambda = \lambda_n$ 代入方程(3.32)可解得

$$T = T_n(t) = A_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

对应的变量可分离的特解为

$$u_n(x, t) = A_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.36)$$

因此问题(3.31)的解可以表示为 $u_0(x, t)$ 、 $u_1(x, t)$ 、 $u_2(x, t)$ ……的叠加,

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (3.37)$$

把(3.37)代入(3.31)的初始条件得

$$\varphi(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (3.38)$$

注意到 $\{1, \cos \frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, \dots\}$ 构成 $[0, l]$ 上的正交函数系,

$$\int_0^l 1^2 dx = l, \quad \int_0^l 1 \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{l}{2}, & n = m \end{cases}, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

故由(3.38)可得解的表达式(3.37)中的各待定系数为

$$A_0 = \tilde{\varphi}_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx, \quad A_n = \tilde{\varphi}_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

2. 矩形区域上Laplace方程边值问题的分离变量法

对于左右两边为齐次边界条件的问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0, & (0 \leq y \leq b) \\ u_y|_{y=0} = \varphi(x), u|_{y=b} = \psi(x), & (0 \leq x \leq a) \end{cases} \quad (3.39)$$

以 $u = X(x)Y(y)$ 代入(3.39)中的方程得

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

再利用(3.29)中的左右边界条件得

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \quad (3.40)$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

$$\begin{cases} X(0) = X'(a) = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

当 $\lambda < 0$ 时, 方程(3.41)的解为 $X(x) = c_1 \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}x)$, 由 $X(0) = 0$ 得 $c_1 = 0$, 故 $X(x) = c_2 \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}x)$; 由 $X'(a) = 0$ 得 $c_2 \sqrt{-\lambda} \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}a) = 0$, 故 $c_2 = 0$, 此时只有平凡解。

当 $\lambda = 0$ 时, 方程(3.41)的解为 $X(x) = c_1 + c_2x$, 由 $X(0) = 0$ 得 $c_1 = 0$; 由 $X'(a) = 0$ 得 $c_2 = 0$. 此时也只有平凡解.

当 $\lambda > 0$ 时, 方程(3.41)的解为 $X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$, 由 $X(0) = 0$ 得 $c_1 = 0$, 故 $X(x) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$; 由 $X'(a) = 0$ 得 $c_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}a) = 0$. 由于非零解要求 $c_2 \neq 0$, 故 λ 必须满足

$$\cos(\sqrt{\lambda}a) = 0, \quad \sqrt{\lambda}a = (n - \frac{1}{2})\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

故得特征值 $\lambda = \lambda_n = \frac{(n - \frac{1}{2})^2 \pi^2}{a^2}$, 对应的特征函数可以取为 $X = X_n(x) = \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{a}$, ($n = 1, 2, \dots$). 把 $\lambda = \lambda_n$ 代入方程(3.40)得

$$Y''(y) - \frac{(n - \frac{1}{2})^2 \pi^2}{a^2} Y(y) = 0$$

解得

$$Y = Y_n(y) = A_n \operatorname{ch} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi y}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi y}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

故问题(3.39)的解可以表示为

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi y}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi y}{a} \right) \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{a} \quad (3.43)$$

$$u_y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{a} \left(A_n \operatorname{sh} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi y}{a} + B_n \operatorname{ch} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi y}{a} \right) \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{a} \quad (3.44)$$

把(3.43)、(3.44)代入问题(3.39)的上下边的边界条件, 得

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{a} B_n \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{a} \quad (3.45)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi b}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi b}{a} \right) \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{a} \quad (3.46)$$

注意到

$$\int_0^a \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{a} \sin \frac{(m - \frac{1}{2})\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{a}{2}, & n = m \end{cases}$$

由(3.45)得

$$B_n = \frac{a}{(n - \frac{1}{2})\pi} \tilde{\varphi}_n = \frac{a}{(n - \frac{1}{2})\pi} \cdot \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(x) \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{a} dx \quad (3.47)$$

由(3.46)得

$$A_n \operatorname{ch} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi b}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi b}{a} = \tilde{\psi}_n = \frac{2}{a} \int_0^a \psi \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{a} dx \quad (3.48)$$

由(3.48)可以解得

$$A_n = \frac{\tilde{\psi}_n - B_n \operatorname{sh} \frac{(n-\frac{1}{2})\pi b}{a}}{\operatorname{ch} \frac{(n-\frac{1}{2})\pi b}{a}}$$

上式中的 B_n 由(3.47)给出。

对于上下边为齐次边界条件的问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ u_y|_{y=0} = u|_{y=b} = 0, & (0 \leq x \leq a) \\ u|_{x=0} = \mu(y), u_x|_{x=a} = \nu(y), & (0 \leq y \leq b) \end{cases} \quad (3.49)$$

令 $u = X(x)Y(y)$ 代入(3.49)的方程和上下边界条件后,可以得到关于 $Y(y)$ 的常微分方程的特征值问题。解此特征值问题后,用类似的方法可得问题(3.49)的解(见习题3.1)。

对于四条边均为非齐次边界条件的问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ u|_{x=0} = \mu(y), u_x|_{x=a} = \nu(y), & (0 \leq y \leq b) \\ u_y|_{y=0} = \varphi(x), u|_{y=b} = \psi(x), & (0 \leq x \leq a) \end{cases} \quad (3.50)$$

由叠加原理,问题(3.50)的解可以表示为 $u(x, y) = u^{(1)}(x, y) + u^{(2)}(x, y)$,其中 $u^{(1)}(x, y)$ 为问题(3.39)的解, $u^{(2)}(x, y)$ 为问题(3.49)的解。

习题3.1

用分离变量法求解以下定解问题:

1.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (t > 0, 0 < x < l) \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & (t > 0, 0 < x < l) \\ u_x|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ u_y|_{y=0} = u|_{y=b} = 0, & (0 \leq x \leq a) \\ u|_{x=0} = \mu(y), u_x|_{x=a} = \nu(y), & (0 \leq y \leq b) \end{cases}$$

§3.2 非齐次方程问题的解法

3.2.1 有界弦的强迫振动, 特征函数展开法

1. 非齐次方程齐次边界条件问题的特征函数展开解法

对于两端固定的有界弦的强迫振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & (t > 0, 0 < x < l) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.51)$$

我们已经知道其对应的齐次方程定解问题(3.1)的特征函数为 $\{\sin \frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, \dots\}$ 。若把问题(3.51)的解按此特征函数系进行Fourier展开,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.52)$$

则 $u(x, t)$ 自动满足(3.51)的边界条件。因此, 如果利用(3.51)的方程和初始条件能求出展开式(3.52)中的系数 $\{\tilde{u}_n(t), n = 1, 2, \dots\}$, 则解就确定了。为此, 把问题(3.51)中方程的右端 $f(x, t)$ 以及初始条件中的 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 都按此特征函数系进行Fourier展开,

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\psi}_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.53)$$

上面各展开式中的系数均为已知,

$$\tilde{f}_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad \tilde{\varphi}_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad \tilde{\psi}_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \\ n = 1, 2, \dots$$

把(3.52)和(3.53)代入问题(3.51)中的方程和初始条件, 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\tilde{u}_n''(t) + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} \tilde{u}_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(0) \sin \frac{n\pi x}{l} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n'(0) \sin \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\psi}_n \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

比较上面各式中等式两边的Fourier系数, 得到关于 $\tilde{u}_n(t)$ 的二阶常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \tilde{u}_n''(t) + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} \tilde{u}_n(t) = \tilde{f}_n(t) \\ \tilde{u}_n(0) = \tilde{\varphi}_n, \tilde{u}_n'(0) = \tilde{\psi}_n \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.54)$$

由常微分方程知识可知, 问题(3.54)的解为

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(t) &= \tilde{\varphi}_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + \frac{l}{n\pi a} \tilde{\psi}_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \\ &\quad + \frac{l}{n\pi a} \int_0^t \tilde{f}_n(\tau) \sin \frac{n\pi a(t-\tau)}{l} d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.55)$$

注意, 对一切 n , (3.55)右端的前两项总是 $t \in [0, +\infty)$ 的有界函数, 第三项是否有界则视 $\tilde{f}_n(t)$ 的情况而定。

如果读者忘记了问题(3.54)的求解公式, 我们也可以用下面的方法得到公式(3.55)。由叠加原理可知, 问题(3.54)的解 $\tilde{u}_n(t) = \tilde{u}_n^{(1)}(t) + \tilde{u}_n^{(2)}(t)$, 其中 $\tilde{u}_n^{(1)}(t)$ 和 $\tilde{u}_n^{(2)}(t)$ 分别是下面两个定解问题的解,

$$\begin{cases} \tilde{u}_n^{(1)''}(t) + \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} \tilde{u}_n^{(1)}(t) = 0 \\ \tilde{u}_n^{(1)}(0) = \tilde{\varphi}_n, \tilde{u}_n^{(1)'}(0) = \tilde{\psi}_n \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.56)$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_n^{(2)''}(t) + \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} \tilde{u}_n^{(2)}(t) = \tilde{f}_n(t) \\ \tilde{u}_n^{(2)}(0) = \tilde{u}_n^{(2)'}(0) = 0 \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.57)$$

问题(3.56)中的方程的通解为

$$\tilde{u}_n^{(1)}(t) = A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.58)$$

把(3.58)代入(3.56)中的初始条件可得

$$A_n = \tilde{\varphi}_n, \quad B_n = \frac{l}{n\pi a} \tilde{\psi}_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.59)$$

问题(3.57)可以由齐次化原理得到。对于定解问题(3.57)定义含参数 τ 的定解问题

$$\begin{cases} \tilde{w}_n''(t) + \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} \tilde{w}_n(t) = 0, & (t > \tau) \\ \tilde{w}_n(\tau) = 0, \tilde{w}_n'(\tau) = \tilde{f}_n(\tau) \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.60)$$

(3.60)的解含参数 τ : $\tilde{w}_n = \tilde{w}_n(t; \tau)$ 。则由齐次化原理, 问题(3.57)的解为

$$\tilde{u}_n^{(2)}(t) = \int_0^t \tilde{w}_n(t; \tau) d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.61)$$

令 $t' = t - \tau$, 则问题(3.60)化为

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{w}_n}{dt'^2} + \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} \tilde{w}_n = 0, & (t' > 0) \\ \tilde{w}_n|_{t'=0} = 0, \frac{d\tilde{w}_n}{dt'}|_{t'=0} = \tilde{f}_n(\tau) \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.62)$$

问题(3.62)的解为

$$\tilde{w}_n = \frac{l}{n\pi a} \tilde{f}_n(\tau) \sin \frac{n\pi at'}{l} = \frac{l}{n\pi a} \tilde{f}_n(\tau) \sin \frac{n\pi a(t - \tau)}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.63)$$

把(3.63)代入(3.61)得

$$\tilde{u}_n^{(2)}(t) = \frac{l}{n\pi a} \int_0^t \tilde{f}_n(\tau) \sin \frac{n\pi a(t - \tau)}{l} d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.64)$$

这样便得到了与(3.55)一样的求解公式。

2. 共振问题

现在研究周期性外力 $f(x, t) = A \sin \omega t$ 时, 问题(3.51)解的特性, 其中 ω 为外力的频率。下面分两种情况来讨论。

- (1) $\omega \neq \omega_n (n = 1, 2, \dots)$, 其中 $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$ 为弦线自由振动的第 n 个固有频率。这时(3.55)中的 $\tilde{f}_n(\tau)$ 为

$$\tilde{f}_n(\tau) = \frac{2}{l} \int_0^l A \sin \omega \tau \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2A}{n\pi} [1 - (-1)^n] \sin \omega \tau$$

故(3.55)右端第三项

$$\begin{aligned} \int_0^t \tilde{f}_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau &= \frac{2A[1 - (-1)^n]}{n\pi} \int_0^t \sin \omega \tau \omega_n(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{2A[1 - (-1)^n]}{n\pi} \cdot \frac{\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t}{\omega^2 - \omega_n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.65)$$

为 $t \in [0, +\infty)$ 的有界函数。

- (2) 当外力频率等于某个自由振动的固有频率, 即 $\omega = \omega_m$ 时, 若 $n \neq m$, 则(3.55)右端的第三项仍由(3.65)给出, 它们是 $t \in [0, +\infty)$ 的有界函数。但当 $n = m$ 时, (3.55)右端第三项为

$$\begin{aligned} \int_0^t \tilde{f}_m(\tau) \sin \omega_m(t - \tau) d\tau &= \frac{2A[1 - (-1)^m]}{m\pi} \int_0^t \sin(\omega_m \tau) \sin \omega_m(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{2A[1 - (-1)^m]}{m\pi} \left[\frac{1}{\omega_m} \sin \omega_m t - t \cos \omega_m t \right], \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

当 m 为奇数时, 上式是 $t \in [0, +\infty)$ 的无界函数, 因此 $\tilde{u}_m(t)$ 也是 t 的无界函数, 这样, 当周期外力的频率与系统的某固有频率重合时, 就会出现共振现象。

由于实际情况总存在阻尼, 故振幅不可能无界。但即便是存在阻尼, 只要阻尼不是很大, 则当周期外力的频率接近于某个固有频率时, 仍然会使振幅变得很大。

实际生活中有很多地方告诉我们都要避开共振现象, 如建筑物(大桥和高层建筑等)的固有频率应设计得尽量避开当地阵风的各种频率。但在乐器设计和微波通讯等领域中, 人们则要利用共振现象。

3. 用齐次化原理方法求解问题(3.51)

由于问题(3.51)是齐次边界条件问题, 我们可用叠加原理结合齐次化原理来求解。由叠加原理, 问题(3.51)的解 $u(x, t) = u^{(1)}(x, t) + u^{(2)}(x, t)$, 其中 $u^{(1)}(x, t)$ 和 $u^{(2)}(x, t)$ 分别满足定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}^{(1)} = a^2 u_{xx}^{(1)}, & (t > 0, 0 < x < l) \\ u^{(1)}|_{x=0} = u^{(1)}|_{x=l} = 0, & (t \geq 0) \\ u^{(1)}|_{t=0} = \varphi(x), u_t^{(1)}|_{t=0} = \psi(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.66)$$

和

$$\begin{cases} u_{tt}^{(2)} = a^2 u_{xx}^{(2)} + f(x, t), & (t > 0, 0 < x < l) \\ u^{(2)}|_{x=0} = u^{(2)}|_{x=l} = 0, & (t \geq 0) \\ u^{(2)}|_{t=0} = u_t^{(2)}|_{t=0} = 0, & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.67)$$

问题(3.66)与问题(3.1)相同, 故它的解为

$$u^{(1)}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tilde{\varphi}_n \cos \frac{n\pi at}{l} + \frac{l}{n\pi a} \tilde{\psi}_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

由齐次化原理, 问题(3.67)的解为

$$u^{(2)}(x, t) = \int_0^t w(x, t; \tau) d\tau \quad (3.68)$$

其中 $w(x, t; \tau)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, & (t > \tau, 0 < x < l) \\ w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0, & (t \geq \tau) \\ w|_{t=\tau} = 0, w_t|_{t=\tau} = f(x, \tau), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.69)$$

令 $t' = t - \tau$, 则问题(3.69)化为

$$\begin{cases} w_{t't'} = a^2 w_{xx}, & (t' > 0, 0 < x < l) \\ w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0, & (t' \geq 0) \\ w|_{t'=0} = 0, w_{t'}|_{t'=0} = f(x, \tau), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.70)$$

利用问题(3.1)的求解公式可得问题(3.70)的解为

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n\pi a} \tilde{f}_n(\tau) \sin \frac{n\pi at'}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n\pi a} \tilde{f}_n(\tau) \sin \frac{n\pi a(t - \tau)}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.71)$$

其中 $\tilde{f}_n(\tau)$ 为 $f(x, \tau)$ 按 $\{\sin \frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, \dots\}$ 进行Fourier展开的第 n 项系数,

$$\tilde{f}_n(\tau) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, \tau) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

把(3.71)代入(3.68)得

$$\begin{aligned} u^{(2)}(x, t) &= \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n\pi a} \tilde{f}_n(\tau) \sin \frac{n\pi a(t - \tau)}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} d\tau \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{l}{n\pi a} \int_0^t \tilde{f}_n(\tau) \sin \frac{n\pi a(t - \tau)}{l} d\tau \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

这与用特征函数展开法所得结果一样。

3.2.2 一维非齐次热传导方程混合问题的解法

1. 特征函数展开法

把定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & (t > 0, 0 < x < l) \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.72)$$

的方程右端 $f(x, t)$ 、初始条件 $\varphi(x)$ 以及解 $u(x, t)$ 都按对应的齐次方程定解问题的特征函数系 $\{\cos \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l}, n = 1, 2, \dots\}$ (见习题3.1的第2题) 进行Fourier展开,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(t) \cos \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \\ f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(t) \cos \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \\ \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_n \cos \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \end{aligned} \quad (3.73)$$

其中系数 $\tilde{u}_n(t)$, ($n = 1, 2, \dots$) 待求, 而其余系数

$$\tilde{f}_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \cos \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} dx, \quad \tilde{\varphi}_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

为已知。把(3.73)代入(3.72)的方程和初始条件, 并比较等式两边的各Fourier系数, 得

$$\begin{cases} \tilde{u}'_n(t) + \frac{(n-\frac{1}{2})^2 \pi^2 a^2}{l^2} \tilde{u}_n(t) = \tilde{f}_n(t) \\ \tilde{u}_n(0) = \tilde{\varphi}_n \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.74)$$

由常微分方程的知识知道, 问题(3.74)的解为

$$\tilde{u}_n(t) = \tilde{\varphi}_n e^{-\frac{(n-\frac{1}{2})^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} + \int_0^t \tilde{f}_n(\tau) e^{-\frac{(n-\frac{1}{2})^2 \pi^2 a^2}{l^2} (t-\tau)} d\tau \quad (3.75)$$

2. 齐次化原理解法

根据叠加原理, 问题(3.72)的解可以写为 $u(x, t) = u^{(1)}(x, t) + u^{(2)}(x, t)$, 其中解 $u^{(1)}(x, t)$ 和 $u^{(2)}(x, t)$ 分别满足如下定解问题

$$\begin{cases} u_t^{(1)} = a^2 u_{xx}^{(1)}, & (t > 0, 0 < x < l) \\ u_x^{(1)}|_{x=0} = u_x^{(1)}|_{x=l} = 0, & (t \geq 0) \\ u^{(1)}|_{t=0} = \varphi(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.76)$$

$$\begin{cases} u_t^{(2)} = a^2 u_{xx}^{(2)} + f(x, t), & (t > 0, 0 < x < l) \\ u_x^{(2)}|_{x=0} = u_x^{(2)}|_{x=l} = 0, & (t \geq 0) \\ u^{(2)}|_{t=0} = 0, & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.77)$$

问题(3.76)的解为 (见习题3.1第2题)

$$u^{(1)}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_n e^{-\frac{(n-\frac{1}{2})^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \cos \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \quad (3.78)$$

由齐次化原理, 问题(3.77)的解为

$$u^{(2)}(x, t) = \int_0^t w(x, t; \tau) d\tau \quad (3.79)$$

其中 $w(x, t; \tau)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx}, & (t > 0, 0 < x < l) \\ w_x|_{x=0} = w_x|_{x=l}, & (t \geq \tau) \\ w|_{t=\tau} = f(x, \tau), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.80)$$

令 $t' = t - \tau$, 问题(3.80)化为

$$\begin{cases} w_{t'} = a^2 w_{xx}, & (t' > 0, 0 < x < l) \\ w_x|_{x=0} = w_x|_{x=l}, & (t' \geq 0) \\ w|_{t'=0} = f(x, \tau), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.81)$$

(3.81)是一个以 t' 为时间变量的齐次方程问题, 由问题(3.76)的求解公式(3.78)可得

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(\tau) e^{-\frac{(n-\frac{1}{2})^2 \pi^2 a^2}{l^2} t'} \cos \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(\tau) e^{-\frac{(n-\frac{1}{2})^2 \pi^2 a^2}{l^2} (t-\tau)} \cos \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \quad (3.82)$$

其中 $\tilde{f}_n(\tau)$ 为 $f(x, \tau)$ 按 $\{\cos \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l}, n = 1, 2, \dots\}$ 进行Fourier展开的第 n 项系数,

$$\tilde{f}_n(\tau) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, \tau) \cos \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} dx$$

把(3.82)代入(3.79)得

$$\begin{aligned} u^{(2)}(x, t) &= \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(\tau) e^{-\frac{(n-\frac{1}{2})^2 \pi^2 a^2}{l^2} (t-\tau)} \cos \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} d\tau \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \tilde{f}_n(\tau) e^{-\frac{(n-\frac{1}{2})^2 \pi^2 a^2}{l^2} (t-\tau)} d\tau \right] \cos \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \end{aligned}$$

这与用特征函数展开法所得的结果完全一样。

3.2.3 Poisson方程边值问题的解法

1. 左右两边为齐次边界条件问题的解法

把定解问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=a} = 0, & (0 \leq y \leq b) \\ u_y|_{y=0} = \varphi(x), u|_{y=b} = \psi(x), & (0 \leq x \leq a) \end{cases} \quad (3.83)$$

中方程的右端 $f(x, y)$ 、上下边界条件 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 以及解 $u(x, y)$ 都按照对应的齐次方程边值问题的特征函数系 $\{\sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{a}, n = 1, 2, \dots\}$ (见本章第一节的二、2段) 进行Fourier展开,

$$\begin{cases} f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(y) \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{a}, & \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_n \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{a} \\ \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\psi}_n \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{a}, & u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(y) \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{a} \end{cases} \quad (3.84)$$

其中系数 $\tilde{u}_n(y)$ ($n = 1, 2, \dots$)待求, 而其余的系数

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n(y) &= \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{a} dx \\ \tilde{\varphi}_n &= \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(x) \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{a} dx \\ \tilde{\psi}_n &= \frac{2}{a} \int_0^a \psi(x) \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{a} dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

为已知的。把(3.84)代入(3.83)中的方程和上下边的边界条件, 并比较等式两边的各Fourier系数, 可得 $\tilde{u}_n(y)$ 的二阶常微分方程的边值问题

$$\begin{cases} \tilde{u}_n''(y) - \frac{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}{a^2} \tilde{u}_n(y) = \tilde{f}_n(y) \\ \tilde{u}_n'(0) = \tilde{\varphi}_n, \tilde{u}_n(b) = \tilde{\psi}_n \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.85)$$

用常微分方程中的常数变易法可以求得(3.85)中的二阶非齐次线性常微分方程的一个特解

$$\frac{a}{(n-\frac{1}{2})\pi} \int_0^y \tilde{f}_n(\eta) \operatorname{sh} \frac{(n-\frac{1}{2})\pi(y-\eta)}{a} d\eta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.86)$$

如果读者忘记了常微分方程中求非齐次方程特解的方法, 我们也可以由常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \tilde{u}_n''(y) - \frac{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}{a^2} \tilde{u}_n(y) = \tilde{f}_n(y) \\ \tilde{u}_n(0) = \tilde{u}_n'(0) = 0 \end{cases} \quad (3.87)$$

求得非齐次方程的一个特解。对应于定解问题(3.87), 定解问题

$$\begin{cases} \tilde{w}_n''(y) - \frac{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}{a^2} \tilde{w}_n(y) = 0, & (y > \eta) \\ \tilde{w}_n(\eta) = 0, & \tilde{w}_n'(\eta) = \tilde{f}_n(\eta) \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.88)$$

的解含有参数 η : $\tilde{w}_n = \tilde{w}_n(y; \eta)$ 。则由齐次化原理, 问题(3.87)的解为

$$\tilde{u}_n = \int_0^y \tilde{w}_n(y; \eta) d\eta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.89)$$

令 $y' = y - \eta$, 则(3.88)化为

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{w}_n}{dy'^2} - \frac{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}{a^2} \tilde{w}_n = 0, & (y' > 0) \\ \tilde{w}_n|_{y'=0} = 0, & \left. \frac{d\tilde{w}_n}{dy'} \right|_{y'=0} = \tilde{f}_n(\eta) \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.90)$$

注意到问题(3.90)中的常微分方程的通解为

$$\tilde{w}_n = \alpha_n \operatorname{ch} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi y'}{a} + \beta_n \operatorname{sh} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi y'}{a}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.91)$$

由(3.90)的初始条件得 $\alpha_n = 0$, $\beta_n = \frac{a}{(n - \frac{1}{2})\pi} \tilde{f}_n(\eta)$, 故

$$\tilde{w}_n = \frac{a}{(n - \frac{1}{2})\pi} \tilde{f}_n(\eta) \operatorname{sh} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi y'}{a} = \frac{a}{(n - \frac{1}{2})\pi} \tilde{f}_n(\eta) \operatorname{sh} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi(y - \eta)}{a}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.92)$$

把(3.92)代入(3.89)可得问题(3.88)的解, 它就是(3.86)所提供的(3.85)中非齐次方程的一个特解。这个特解加上对应的齐次方程的通解, 即得非齐次方程的通解为

$$\tilde{u}_n(y) = A_n \operatorname{ch} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi y}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi y}{a} + \frac{a}{(n - \frac{1}{2})\pi} \int_0^y \tilde{f}_n(\eta) \operatorname{sh} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi(y - \eta)}{a} d\eta \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.93)$$

求导后得

$$\begin{aligned} \tilde{u}'_n(y) &= \frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{a} \left[A_n \operatorname{sh} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi y}{a} + B_n \operatorname{ch} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi y}{a} \right] \\ &\quad + \frac{a}{(n - \frac{1}{2})\pi} \tilde{f}_n(\eta) \operatorname{sh} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi(y - \eta)}{a} \Big|_{\eta=y} \\ &\quad + \frac{a}{(n - \frac{1}{2})\pi} \cdot \frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{a} \int_0^y \tilde{f}_n(\eta) \operatorname{ch} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi(y - \eta)}{a} d\eta \\ &= \frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{a} \left[A_n \operatorname{sh} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi y}{a} + B_n \operatorname{ch} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi y}{a} \right] \\ &\quad + \int_0^y \tilde{f}_n(\eta) \operatorname{ch} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi(y - \eta)}{a} d\eta, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.94)$$

把(3.94)代入(3.85)的第一个边界条件得

$$B_n = \frac{a}{(n - \frac{1}{2})\pi} \tilde{\varphi}_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.95)$$

把(3.93)代入(3.85)的第二个边界条件得

$$A_n = \frac{\tilde{\psi}_n - B_n \operatorname{sh} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi b}{a} - \frac{a}{(n - \frac{1}{2})\pi} \int_0^b \tilde{f}_n(\eta) \operatorname{sh} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi(b - \eta)}{a} d\eta}{\operatorname{ch} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi b}{a}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.96)$$

(3.96)中的 B_n , ($n = 1, 2, \dots$) 由(3.95)给出。把求得的 A_n, B_n , ($n = 1, 2, \dots$) 代入(3.93), 就得到问题(3.85)的解。

注意, 对于边值问题(3.83)不能用齐次化原理求解。由此可知, 特征函数展开法比齐次化原理更具有一般性。

2. 四条边都是非齐次边界问题的解法

由叠加原理, 问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ u|_{x=0} = \mu(y), \quad u_x|_{x=a} = \nu(y), & (0 \leq y \leq b) \\ u_y|_{y=0} = \varphi(x), \quad u|_{y=b} = \psi(x), & (0 \leq x \leq a) \end{cases} \quad (3.97)$$

的解 $u(x, y) = u^{(1)}(x, y) + u^{(2)}(x, y)$, 其中 $u^{(1)}(x, y)$ 和 $u^{(2)}(x, y)$ 分别满足下面的定解问题的解

$$\begin{cases} u^{(1)}_{xx} + u^{(1)}_{yy} = f(x, y), & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ u^{(1)}|_{x=0} = u^{(1)}_x|_{x=a} = 0, & (0 \leq y \leq b) \\ u^{(1)}_y|_{y=0} = \varphi(x), \quad u^{(1)}|_{y=b} = \psi(x), & (0 \leq x \leq a) \end{cases} \quad (3.98)$$

$$\begin{cases} u^{(2)}_{xx} + u^{(2)}_{yy} = 0, & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ u^{(2)}|_{x=0} = \mu(y), \quad u^{(2)}_x|_{x=a} = \nu(y), & (0 \leq y \leq b) \\ u^{(2)}_y|_{y=0} = u^{(2)}|_{y=b} = 0, & (0 \leq x \leq a) \end{cases} \quad (3.99)$$

问题(3.98)的解已在前面给出, 问题(3.99)的解可以直接用分离变量法给出(见习题3.1第3题)。

问题(3.97)的另一种解法是构造函数 $p(x, y) = \mu(y) + \nu(y)x$, 它满足问题(3.97)的左右边上的边界条件。令 $v(x, y) = u(x, y) - p(x, y)$, 则 $v(x, y)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = f(x, y) - \mu''(y) - x\nu''(y), & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ v|_{x=0} = v_x|_{x=a} = 0, & (0 \leq y \leq b) \\ v_y|_{y=0} = \varphi(x) - \mu'(0) - \nu'(0), \quad v|_{y=b} = \psi(x) - \mu(b) - \nu(b)x, & (0 \leq x \leq a) \end{cases} \quad (3.100)$$

问题(3.100)可用求解问题(3.83)的方法求得。

习题3.2

用特征函数展开法求解以下定解问题:

1.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & (t > 0, 0 < x < l) \\ u_x|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & (t > 0, 0 < x < l) \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=a} = 0, & (0 \leq y \leq b) \\ u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u_y|_{y=b} = \psi(x), & (0 \leq x \leq a) \end{cases}$$

§3.3 非齐次边界条件问题的解法

3.3.1 边界条件的齐次化

分离变量法只能用于齐次边界条件的问题。对于非齐次边界条件的问题，我们首先要将问题变为齐次边界条件问题，然后再用分离变量法求解。

1. 第一类边界条件的齐次化

对于两端都是第一类非齐次边界条件的弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & (t > 0, 0 < x < l) \\ u|_{x=0} = \mu(t), \quad u|_{x=l} = \nu(t), & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.101)$$

我们设法构造一个函数 $p(x, t)$ ，它满足 $p|_{x=0} = \mu(t)$ ， $p|_{x=l} = \nu(t)$ 。然后令 $v(x, t) = u(x, t) - p(x, t)$ ，则 $v(x, t)$ 就满足齐次边界条件 $v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0$ 。那么，如何构造这样的函数 $p(x, t)$ 呢？最简便的方法就是设 $p(x, t)$ 是关于 x 的线性函数， $p(x, t) = \alpha(t) + \beta(t)x$ ，其中 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 是 t 的待定函数。代入边界条件 $p|_{x=0} = \mu(t)$ ， $p|_{x=l} = \nu(t)$ ，可得 $\alpha(t) = \mu(t)$ ， $\beta(t) = \frac{\nu(t) - \mu(t)}{l}$ 。令 $v(x, t) = u(x, t) - p(x, t)$ ，则 $v(x, t)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x, t) - \frac{\nu''(t) - \mu''(t)}{l} x - \mu''(t), & (t > 0, 0 < x < l) \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0, & (t \geq 0) \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - \frac{\nu(0) - \mu(0)}{l} x - \mu(0), \quad v_t|_{t=0} = \psi(x) - \frac{\nu'(0) - \mu'(0)}{l} x - \mu'(0), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.102)$$

问题(3.102)可以用特征函数展开法来求解。

2. 其它边界条件问题的边界条件齐次化方法

只要两个端点有一个是第一类边界条件的问题，我们总可以设 $p(x, t) = \alpha(t) + \beta(t)x$ 为 x 的线性函数，然后由边界条件把 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 确定下来，例如：

- 对于 $u|_{x=0} = \mu(t)$ ， $u_x|_{x=l} = \nu(t)$ 的问题，可以求得 $p(x, t) = \mu(t) + \nu(t)x$ ；
- 对于 $u_x|_{x=0} = \mu(t)$ ， $u|_{x=l} = \nu(t)$ 的问题，可以求得 $p(x, t) = \nu(t) - l \cdot \mu(t) + \mu(t)x$ ；
- 对于 $u|_{x=0} = \mu(t)$ ， $(u_x + \sigma u)|_{x=l} = \nu(t)$ 的问题，可求得 $p(x, t) = \mu(t) + \frac{\nu(t) - \sigma \mu(t)}{1 + \sigma l} x$ 。

然而对于两端都是第二类边界条件的问题 $u_x|_{x=0} = \mu(t)$, $u_x|_{x=l} = \nu(t)$, 把 $p(x, t)$ 设成 x 的线性函数是不行的。但此时可以设 $p(x, t) = \alpha(t)x + \beta(t)x^2$ 为 x 的二次函数, 代入边界条件可得 $p(x, t) = \mu(t)x + \frac{\nu(t) - \mu(t)}{2l}x^2$ 。

3.3.2 方程和边界条件同时齐次化的方法

由前面的推导可以看到, 对于一般的非齐次边界条件问题, 即使方程是齐次的, 经过边界条件齐次化以后所得到的定解问题的方程仍然可能是非齐次的。但是在下面的两种特殊情况, 我们可以保证边界条件齐次化以后的定解问题的方程是齐次的。

1. $\mu(t) = A, \nu(t) = B, f(x, t) = f(x)$ 的情形

在这种情形下, 我们可以选择一个函数 $p(x)$, 使它既满足方程, 又满足边界条件。然后, 令 $v(x, t) = u(x, t) - p(x)$, 则 $v(x, t)$ 一定满足齐次方程和齐次边界条件。例如, 对于定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + x, & (t > 0, 0 < x < l) \\ u_x|_{x=0} = A, \quad u_x|_{x=l} = B, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.103)$$

令 $p(x)$ 满足方程和边界条件, 得

$$p''(x) = -\frac{1}{a^2}x, \quad p'(0) = A, \quad p(l) = B$$

由上式求得 $p(x) = -\frac{1}{6a^2}x^3 + Ax + \frac{1}{6a^2}l^3 - Al + B$ 。令 $v(x, t) = u(x, t) - p(x)$, 则 $v(x, t)$ 满足下面的齐次方程、齐次边界条件的定解问题,

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, & (t > 0, 0 < x < l) \\ v_x|_{x=0} = v_x|_{x=l} = 0, & (t \geq 0) \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - p(x), \quad v_t|_{t=0} = \psi(x) - p'(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.104)$$

问题(3.104)可以直接用分离变量法求解。

2. $f(x, t) = f_1(x) \cos \omega t + f_2(x) \sin \omega t, \mu(t) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t, \nu(t) = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t$ 的情形

(1) 对于一维热传导方程问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f_1(x) \cos \omega t + f_2(x) \sin \omega t, & (t > 0, 0 < x < l) \\ u_x|_{x=0} = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t, \quad (u_x + \sigma u)|_{x=l} = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.105)$$

上式中 $\sigma > 0$ 为常数。可设 $p(x, t) = \alpha(x) \cos \omega t + \beta(x) \sin \omega t$, 令 $p(x, t)$ 满足(3.105)中的方程和边界条件, 则有

$$\begin{aligned} -\omega\alpha(x) \sin \omega t + \omega\beta(x) \cos \omega t &= a^2[\alpha''(x) \cos \omega t + \beta''(x) \sin \omega t] + f_1(x) \cos \omega t + f_2(x) \sin \omega t \\ \alpha'(0) \cos \omega t + \beta'(0) \sin \omega t &= A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t \\ [\alpha'(l) + \sigma\alpha(l)] \cos \omega t + [\beta'(l) + \sigma\beta(l)] \sin \omega t &= A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \end{aligned}$$

比较上面各式中的 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 前的系数得

$$\begin{cases} \alpha''(x) - \frac{\omega}{a^2}\beta(x) + \frac{1}{a^2}f_1(x) = 0 \\ \beta''(x) + \frac{\omega}{a^2}\alpha(x) + \frac{1}{a^2}f_2(x) = 0 \end{cases} \quad (3.106)$$

$$\alpha'(0) = A_1, \quad \beta'(0) = B_1, \quad \alpha'(l) + \sigma\alpha(l) = A_2, \quad \beta'(l) + \sigma\beta(l) = B_2 \quad (3.107)$$

在定解条件(3.107)下求解二阶线性常系数常微分方程组(3.106), 可得 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$, 从而可以确定 $p(x, t)$ 。令 $v(x, t) = u(x, t) - p(x, t)$, 则 $v(x, t)$ 满足齐次方程和齐次边界条件的定解问题

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, & (t > 0, 0 < x < l) \\ v_x|_{x=0} = (v_x + \sigma v)|_{x=l} = 0, & (t \geq 0) \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - \alpha(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.108)$$

定解问题(3.108)可以直接采用分离变量法求解。

(2) 对于弦振动方程问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_1(x) \cos \omega t + f_2(x) \sin \omega t, & (t > 0, 0 < x < l) \\ u|_{x=0} = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t, u_x|_{x=l} = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.109)$$

我们要求 $\omega \neq \frac{(n-\frac{1}{2})\pi a}{l}$ ($n = 1, 2, \dots$), 即要求非共振的情形 (如果是共振的情形, 仍采用本节一开始给出的一般的边界条件齐次化方法来求解)。在这种情形下, 我们假设 $p(x, t) = \alpha(x) \cos \omega t + \beta(x) \sin \omega t$, 代入上式中的方程和边界条件, 并比较 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 前的系数, 可得

$$\alpha''(x) + \frac{\omega^2}{a^2}\alpha(x) + \frac{1}{a^2}f_1(x) = 0, \quad \alpha(0) = A_1, \quad \alpha'(l) = A_2 \quad (3.110)$$

$$\beta''(x) + \frac{\omega^2}{a^2}\beta(x) + \frac{1}{a^2}f_2(x) = 0, \quad \beta(0) = B_1, \quad \beta'(l) = B_2 \quad (3.111)$$

(3.110)和(3.111)中的常微分方程的通解分别为

$$\alpha(x) = c_1 \cos \frac{\omega x}{a} + c_2 \sin \frac{\omega x}{a} + \alpha_0(x) \quad (3.112)$$

$$\beta(x) = c_3 \cos \frac{\omega x}{a} + c_4 \sin \frac{\omega x}{a} + \beta_0(x) \quad (3.113)$$

其中 $\alpha_0(x)$ 和 $\beta_0(x)$ 分别是这两个常微分方程的任何一个特解, c_1, c_2, c_3, c_4 为待定常数. 对(3.112)和(3.113)求导得

$$\alpha'(x) = \frac{w}{a} \left(c_2 \cos \frac{\omega x}{a} - c_1 \sin \frac{\omega x}{a} \right) + \alpha'_0(x) \quad (3.114)$$

$$\beta'(x) = \frac{w}{a} \left(c_4 \cos \frac{\omega x}{a} - c_3 \sin \frac{\omega x}{a} \right) + \beta'_0(x) \quad (3.115)$$

把(3.112)~(3.115)代入(3.110)和(3.111)中的定界条件得

$$c_1 = A_1 - \alpha_0(0), \quad c_3 = B_1 - \beta_0(0) \quad (3.116)$$

$$c_2 = \frac{\frac{a}{\omega} [A_2 - \alpha'_0(l)] + c_1 \sin \frac{\omega l}{a}}{\cos \frac{\omega l}{a}}, \quad c_4 = \frac{\frac{a}{\omega} [B_2 - \beta'_0(l)] + c_3 \sin \frac{\omega l}{a}}{\cos \frac{\omega l}{a}} \quad (3.117)$$

(3.117)中的 c_1 和 c_3 用(3.116)中的计算结果代入. 从(3.117), 可以看到非共振假设的用处. 求出 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 后, $p(x, t)$ 就可以确定了. 令 $v(x, t) = u(x, t) - p(x, t)$, 则 $v(x, t)$ 满足齐次方程和齐次边界条件的定解问题

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, & (t > 0, 0 < x < l) \\ v|_{x=0} = v_x|_{x=l} = 0, & (t \geq 0) \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - \alpha(x), v_t|_{t=0} = \psi(x) - \omega\beta(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.118)$$

定解问题(3.118)可以直接采用分离变量法求解.

习题3.3

用边界条件和方程同时齐次化的方法求解下面的定解问题:

1.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 6x, & (t > 0, 0 < x < 1) \\ u|_{x=0} = 1, u_x|_{x=1} = 2, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = 2x + 1, & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & (t > 0, 0 < x < 1) \\ u_x|_{x=0} = \cos t, u|_{x=1} = \sin t, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

§3.4 直角坐标系下高维问题的分离变量解法

3.4.1 齐次方程齐次边界条件问题

我们用分离变量法求解矩形薄膜的自由振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), & (t > 0, 0 < x < l, 0 < y < h) \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, & (0 \leq y \leq h, t \geq 0) \\ u_y|_{y=0} = u|_{y=h} = 0, & (0 \leq x \leq l, t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y), u_t|_{t=0} = \psi(x, y), & (0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq h) \end{cases} \quad (3.119)$$

为此, 先求变量可分离的非零特解 $u(x, y, t) = V(x, y)T(t)$, 代入(3.119)的方程得

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{V_{xx} + V_{yy}}{V(x, y)} = -\lambda$$

利用上式以及(3.119)的边界条件可得

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (3.120)$$

$$\begin{cases} V_{xx} + V_{yy} + \lambda V(x, y) = 0 \\ V|_{x=0} = V_x|_{x=l} = 0, & (0 \leq y \leq h) \\ V_y|_{y=0} = V|_{y=h} = 0, & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.121)$$

(3.121)是一个偏微分方程的特征值问题, 我们的目的是找出使(3.121)有非平凡解的 λ 值(特征值)以及对应的非零解 $V(x, y)$ (特征函数)。我们用分离变量法求解此偏微分方程的特征值问题。为此, 先求出(3.121)的变量可分离的非零特解 $V(x, y) = X(x)Y(y)$, 代入(3.121)的方程可得

$$\frac{Y''(y) + \lambda Y(y)}{Y(y)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = \mu$$

利用上式以及(3.121)的边界条件可得

$$\begin{cases} Y''(y) + (\lambda - \mu)Y(y) = 0 \\ Y'(0) = Y(h) = 0 \end{cases} \quad (3.122)$$

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad (3.123)$$

常微分方程的特征值问题(3.123)的特征值为 $\mu = \mu_n = \frac{(n-\frac{1}{2})^2 \pi^2}{l^2}$, 对应的特征函数为 $X = X_n(x) = \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l}$ ($n = 1, 2, \dots$)。把 $\mu = \mu_n$ 代入(3.122), 当 $\lambda - \mu_n = \frac{(m-\frac{1}{2})^2 \pi^2}{h^2}$ 时, 特征函数有非零解 $Y = Y_m(y) = \cos \frac{(m-\frac{1}{2})\pi y}{h}$ ($m = 1, 2, \dots$)。故当

$$\lambda = \lambda_{n,m} = \frac{(n-\frac{1}{2})^2 \pi^2}{l^2} + \frac{(m-\frac{1}{2})^2 \pi^2}{h^2}, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (3.124)$$

时, (3.121)有非零解, 故 $\lambda_{n,m}$ 为问题(3.121)的特征值, 对应的特征函数为

$$V = V_{n,m}(x, y) = X_n(x)Y_m(y) = \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{l} \cos \frac{(m - \frac{1}{2})\pi}{h}, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (3.125)$$

把 $\lambda = \lambda_{n,m}$ 代入方程(3.120)得

$$T''(t) + a^2\lambda_{n,m}T(t) = 0$$

此方程的通解为

$$T(t) = T_{n,m}(t) = A_{n,m} \cos(a\sqrt{\lambda_{n,m}} t) + B_{n,m} \sin(a\sqrt{\lambda_{n,m}} t), \quad n, m = 1, 2, \dots$$

故问题(3.119)的仅满足方程和边界条件的变量可分离特解的一般形式为

$$u_{n,m}(x, y, t) = V_{n,m}(x, y)T_{n,m}(t), \quad n, m = 1, 2, \dots$$

原问题(3.119)的解可以表示成这些变量可分离形式特解的叠加,

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}(x, y, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[A_{n,m} \cos(a\sqrt{\lambda_{n,m}} t) + B_{n,m} \sin(a\sqrt{\lambda_{n,m}} t) \right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{l} \cos \frac{(m - \frac{1}{2})\pi y}{h} \right\} \end{aligned} \quad (3.126)$$

由(3.119)的初始条件可得

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{l} \cos \frac{(m - \frac{1}{2})\pi y}{h} \quad (3.127)$$

$$\psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a\sqrt{\lambda_{n,m}} B_{n,m} \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{l} \cos \frac{(m - \frac{1}{2})\pi y}{h} \quad (3.128)$$

注意到函数系 $\{\sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{l} \cos \frac{(m - \frac{1}{2})\pi y}{h}, \quad n, m = 1, 2, \dots\}$ 构成矩形区域 $\{0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq h\}$ 上的正交函数系,

$$\begin{aligned} &\int_0^l \int_0^h \left[\sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{l} \cos \frac{(m - \frac{1}{2})\pi y}{h} \right] \cdot \left[\sin \frac{(n' - \frac{1}{2})\pi x}{l} \cos \frac{(m' - \frac{1}{2})\pi y}{h} \right] dx dy \\ &= \int_0^l \left[\sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{l} \sin \frac{(n' - \frac{1}{2})\pi x}{l} \right] dx \cdot \int_0^h \left[\cos \frac{(m - \frac{1}{2})\pi y}{h} \cos \frac{(m' - \frac{1}{2})\pi y}{h} \right] dy \\ &= \begin{cases} \frac{l}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{lh}{4}, & \text{当 } n' = n \text{ 且 } m' = m \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases} \end{aligned}$$

故由(3.127)和(3.128)可得解的表达式(3.126)中的待定系数为

$$\begin{cases} A_{n,m} = \frac{4}{lh} \int_0^l \int_0^h \varphi(x,y) \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \cos \frac{(m-\frac{1}{2})\pi y}{h} dx dy \\ B_{n,m} = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_{n,m}}} \frac{4}{lh} \int_0^l \int_0^h \varphi(x,y) \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \cos \frac{(m-\frac{1}{2})\pi y}{h} dx dy \end{cases} \quad n, m = 1, 2, \dots$$

对于长方体区域上的齐次方程齐次边界条件问题, 采用类似的方法, 经过三次分离变量后, 就可以得到问题的解, 有兴趣的读者可以自己推一下。

值得提一下的是, 对于矩形区域Poisson方程的边值问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x,y), & (0 < x < l, 0 < y < h) \\ u|_{x=0} = \mu(y), \quad u_x|_{x=l} = \nu(y), & (0 \leq y \leq h) \\ u_y|_{y=0} = \varphi(x), \quad u|_{y=h} = \psi(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.129)$$

利用叠加原理, 它的解可以表示为 $u(x,y) = u^{(1)}(x,y) + u^{(2)}(x,y) + u^{(3)}(x,y)$, 其中 $u^{(1)}(x,y)$, $u^{(2)}(x,y)$ 和 $u^{(3)}(x,y)$ 分别满足如下定解问题:

$$\begin{cases} u^{(1)}_{xx} + u^{(1)}_{yy} = 0, & (0 < x < l, 0 < y < h) \\ u^{(1)}|_{x=0} = u^{(1)}_x|_{x=l} = 0, & (0 \leq y \leq h) \\ u^{(1)}_y|_{y=0} = \varphi(x), \quad u^{(1)}|_{y=h} = \psi(x), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.130)$$

$$\begin{cases} u^{(2)}_{xx} + u^{(2)}_{yy} = 0, & (0 < x < l, 0 < y < h) \\ u^{(2)}|_{x=0} = \mu(y), \quad u^{(2)}_x|_{x=l} = \nu(y), & (0 \leq y \leq h) \\ u^{(2)}_y|_{y=0} = u^{(2)}|_{y=h} = 0, & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.131)$$

$$\begin{cases} u^{(3)}_{xx} + u^{(3)}_{yy} = f(x,y), & (0 < x < l, 0 < y < h) \\ u^{(3)}|_{x=0} = u^{(3)}_x|_{x=l} = 0, & (0 \leq y \leq h) \\ u^{(3)}_y|_{y=0} = u^{(3)}|_{y=h} = 0, & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.132)$$

问题(3.130)和(3.131)可以直接用分离变量法求解。对于问题(3.132), 我们把方程右端都按对应的偏微分方程的特征值问题(3.121)的特征函数系(3.125)进行Fourier展开,

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{f}_{n,m} \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \cos \frac{(m-\frac{1}{2})\pi y}{h} \quad (3.133)$$

$$u^{(3)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{u}_{n,m}^{(3)}(x,y) \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \cos \frac{(m-\frac{1}{2})\pi y}{h} \quad (3.134)$$

其中展开式(3.133)的系数是已知的,

$$\tilde{f}_{n,m} = \frac{4}{lh} \int_0^l \int_0^h f(x,y) \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \cos \frac{(m-\frac{1}{2})\pi y}{h} dx dy, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

由于特征函数总是满足(3.132)的边界条件, 因此, 我们只要利用(3.132)的方程把展开式(3.134)中的系数求出来就可以了。为此, 把(3.133)和(3.134)代入(3.132)的方程, 得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} -\lambda_{n,m} \tilde{u}_{n,m} \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \cos \frac{(m-\frac{1}{2})\pi y}{h} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{f}_{n,m} \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \cos \frac{(m-\frac{1}{2})\pi y}{h} \end{aligned}$$

其中 $\lambda_{n,m}$ 为问题(3.121)的特征值, 它由(3.124)给出。比较上式中各Fourier分量的系数, 可得展开式(3.134)中的待定系数为

$$\tilde{u}_{n,m}^{(3)} = -\frac{\tilde{f}_{n,m}}{\lambda_{n,m}}, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

3.4.2 非齐次方程齐次边界条件问题的解法

对于非齐次方程齐次边界条件问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), & (0 < x < l, 0 < y < h) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, & (0 \leq y \leq h, t \geq 0) \\ u_y|_{y=0} = u|_{y=h} = 0, & (0 \leq x \leq l, t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y), & (0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq h) \end{cases} \quad (3.135)$$

我们把方程右端 $f(x, y, t)$ 初始条件 $\varphi(x, y)$ 和 $\psi(x, y)$ 以及解 $u(x, y, t)$ 都按对应齐次方程的正交函数系 $\left\{ \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \cos \frac{(m-\frac{1}{2})\pi y}{h}, \quad n, m = 1, 2, \dots \right\}$ 进行Fourier展开,

$$\begin{cases} u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{u}_{n,m}(t) \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \cos \frac{(m-\frac{1}{2})\pi y}{h} \\ f(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{f}_{n,m}(t) \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \cos \frac{(m-\frac{1}{2})\pi y}{h} \\ \varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_{n,m} \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \cos \frac{(m-\frac{1}{2})\pi y}{h} \\ \psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{n,m} \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \cos \frac{(m-\frac{1}{2})\pi y}{h} \end{cases} \quad (3.136)$$

其中系数 $\tilde{f}_{n,m}(t)$, $\tilde{\varphi}_{n,m}$, $\tilde{\psi}_{n,m}$ ($n, m = 1, 2, \dots$)为已知,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n,m}(t) &= \frac{4}{lh} \int_0^l \int_0^h f(x, y, t) \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \cos \frac{(m-\frac{1}{2})\pi y}{h} dx dy \\ \tilde{\varphi}_{n,m} &= \frac{4}{lh} \int_0^l \int_0^h \varphi(x, y) \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \cos \frac{(m-\frac{1}{2})\pi y}{h} dx dy \\ \tilde{\psi}_{n,m} &= \frac{4}{lh} \int_0^l \int_0^h \psi(x, y) \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \cos \frac{(m-\frac{1}{2})\pi y}{h} dx dy, \quad n, m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

把(3.136)代入(3.135)的方程和初始条件, 并比较等式两边各Fourier分量的系数可得 $\tilde{u}_{n,m}(t)$ 所满足的常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \tilde{u}_{n,m}''(t) + a^2 \lambda_{n,m} \tilde{u}_{n,m}(t) = \tilde{f}_{n,m}(t) \\ \tilde{u}_{n,m}(0) = \tilde{\varphi}_{n,m}, \quad \tilde{u}'_{n,m}(0) = \tilde{\psi}_{n,m} \end{cases} \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (3.137)$$

其中特征值 $\lambda_{n,m}$ 由(3.124)给出。问题(3.137)与问题(3.54)相类似, 故它的解为

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{n,m}(t) = & \tilde{\varphi}_{n,m} \cos(a\sqrt{\lambda_{n,m}} t) + \frac{\tilde{\psi}_{n,m}}{a\sqrt{\lambda_{n,m}}} \sin(a\sqrt{\lambda_{n,m}} t) \\ & + \frac{1}{a\sqrt{\lambda_{n,m}}} \int_0^t \tilde{f}_{n,m}(\tau) \sin\left[\sqrt{\lambda_{n,m}}(t-\tau)\right] d\tau, \quad n, m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.138)$$

3.4.3 非齐次边界条件问题的解

我们采用边界条件齐次化的方法求解非齐次边界条件问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), & (t > 0, 0 < x < l, 0 < y < h) \\ u|_{x=0} = \mu(y, t), \quad u_x|_{x=l} = \nu(y, t), & (0 \leq y \leq h, t \geq 0) \\ u_y|_{y=0} = \alpha(x, t), \quad u|_{y=h} = \beta(x, t), & (0 \leq x \leq l, t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y), & (0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq h) \end{cases} \quad (3.139)$$

为此, 先选一个函数 $p(x, y, t)$, 使它满足(3.139)中的边界条件,

$$\begin{cases} p|_{x=0} = \mu(y, t), \quad p_x|_{x=l} = \nu(y, t), & (0 \leq y \leq h, t \geq 0) \\ p_y|_{y=0} = \alpha(x, t), \quad p|_{y=h} = \beta(x, t), & (0 \leq x \leq l, t \geq 0) \end{cases} \quad (3.140)$$

然后令 $v(x, y, t) = u(x, y, t) - p(x, y, t)$, 则 $v(x, y, t)$ 满足下面的齐次边界条件问题

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2(v_{xx} + v_{yy}) + f(x, y, t) - p_{tt} + a^2(p_{xx} + p_{yy}), & (t > 0, 0 < x < l, 0 < y < h) \\ v|_{x=0} = v_x|_{x=l} = 0, & (0 \leq y \leq h, t \geq 0) \\ v_y|_{y=0} = v|_{y=h} = 0, & (0 \leq x \leq l, t \geq 0) \\ v|_{t=0} = \varphi(x, y) - p(x, y, 0), \quad v_t|_{t=0} = \psi(x, y) - p_t(x, y, 0), & (0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq h) \end{cases} \quad (3.141)$$

问题(3.141)可以采用特征函数展开法求解。然而, 在二维情况, 选一个满足边界条件的 $p(x, y, t)$ 并非易事。有各种方法可以选出满足边界条件的 $p(x, y, t)$, 其中一种方法是在任一时刻 t , 令 $p(x, y, t)$ 满足下面的Laplace方程的边值问题

$$\begin{cases} p_{xx} + p_{yy} = 0, & (0 < x < l, 0 < y < h) \\ u|_{x=0} = \mu(y, t), \quad u_x|_{x=l} = \nu(y, t), & (0 \leq y \leq h) \\ u_y|_{y=0} = \alpha(x, t), \quad u|_{y=h} = \beta(x, t), & (0 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (3.142)$$

由此前的讨论结果可知: 利用叠加原理, 问题(3.142)的解 $p(x, y, t) = p^{(1)}(x, y, t) + p^{(2)}(x, y, t)$, 其中 $p^{(1)}(x, y, t)$ 满足左、右边界条件为齐次边界条件的问题; $p^{(2)}(x, y, t)$ 满足上、下边界条件为齐次边界条件的问题。这两个边值问题都可以直接采用分离变量法求解。把求得的这两个解叠加后, 可得

$$\begin{aligned} p(x, y, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n(t) \operatorname{ch} \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi y}{l} + B_n(t) \operatorname{sh} \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi y}{l} \right] \sin \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi x}{l} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left[C_m(t) \operatorname{ch} \frac{(m - \frac{1}{2}) \pi x}{h} + D_m(t) \operatorname{sh} \frac{(m - \frac{1}{2}) \pi x}{h} \right] \cos \frac{(m - \frac{1}{2}) \pi y}{h} \end{aligned} \quad (3.143)$$

(3.143)关于 x 和 y 求导以后可得

$$p_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi}{l} \left[A_n(t) \operatorname{ch} \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi y}{l} + B_n(t) \operatorname{sh} \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi y}{l} \right] \cos \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi x}{l} \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m - \frac{1}{2}) \pi}{h} \left[C_m(t) \operatorname{sh} \frac{(m - \frac{1}{2}) \pi x}{h} + D_m(t) \operatorname{ch} \frac{(m - \frac{1}{2}) \pi x}{h} \right] \cos \frac{(m - \frac{1}{2}) \pi y}{h} \quad (3.144)$$

$$p_y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi}{l} \left[A_n(t) \operatorname{sh} \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi y}{l} + B_n(t) \operatorname{ch} \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi y}{l} \right] \sin \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi x}{l} \\ - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m - \frac{1}{2}) \pi}{h} \left[C_m(t) \operatorname{ch} \frac{(m - \frac{1}{2}) \pi x}{h} + D_m(t) \operatorname{sh} \frac{(m - \frac{1}{2}) \pi x}{h} \right] \sin \frac{(m - \frac{1}{2}) \pi y}{h} \quad (3.145)$$

把(3.143)~(3.145)代入(3.142)的边界条件得

$$\mu(y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(t) \cos \frac{(m - \frac{1}{2}) \pi y}{h}, \quad \alpha(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi}{l} B_n(t) \sin \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi x}{l} \quad (3.146)$$

$$\nu(y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m - \frac{1}{2}) \pi}{h} \left[C_m(t) \operatorname{sh} \frac{(m - \frac{1}{2}) \pi l}{h} + D_m(t) \operatorname{ch} \frac{(m - \frac{1}{2}) \pi l}{h} \right] \cos \frac{(m - \frac{1}{2}) \pi y}{h} \quad (3.147)$$

$$\beta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n(t) \operatorname{ch} \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi h}{l} + B_n(t) \operatorname{sh} \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi h}{l} \right] \sin \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi x}{l} \quad (3.148)$$

由(3.146)可得

$$C_m(t) = \tilde{\mu}_m(t) = \frac{2}{h} \int_0^h \mu(y, t) \cos \frac{(m - \frac{1}{2}) \pi y}{h} dy, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.149)$$

$$B_n(t) = \frac{l \cdot \tilde{\alpha}_n(t)}{(n - \frac{1}{2}) \pi} = \frac{2}{(n - \frac{1}{2}) \pi} \int_0^l \alpha(x, t) \sin \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.150)$$

$$A_n(t) = \frac{\tilde{\beta}_n(t) - B_n(t) \operatorname{sh} \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi h}{l}}{\operatorname{ch} \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi h}{l}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.151)$$

$$D_m(t) = \frac{\frac{h}{(m - \frac{1}{2}) \pi} \tilde{\nu}_m(t) - C_m(t) \operatorname{sh} \frac{(m - \frac{1}{2}) \pi l}{h}}{\operatorname{ch} \frac{(m - \frac{1}{2}) \pi l}{h}}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.152)$$

(3.151)和(3.152)中的 $C_m(t)$ 和 $B_n(t)$ 分别由(3.149)和(3.150)给出, 而 $\tilde{\beta}_n(t)$ 和 $\tilde{\nu}_m(t)$ 分别为

$$\tilde{\beta}_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \beta(x, t) \sin \frac{(n - \frac{1}{2}) \pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \\ \tilde{\nu}_m(t) = \frac{2}{h} \int_0^h \nu(y, t) \cos \frac{(m - \frac{1}{2}) \pi y}{h} dy, \quad m = 1, 2, \dots$$

习题3.4

用分离变量法求解热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), & (t > 0, 0 < x < l, 0 < y < h) \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, & (0 \leq y \leq h, t \geq 0) \\ u|_{y=0} = u|_{y=h} = 0, & (0 \leq x \leq l, t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y), & (0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq h) \end{cases}$$

§3.5 极坐标系下的分离变量法

3.5.1 由射线和圆弧所界定区域中问题的解法

1. 齐次方程和齐次边界条件的解法

我们用分离变量法求解Laplace方程的边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & (r_1 < r < r_2, 0 < \theta < \theta_0) & (3.153) \\ u|_{\theta=0} = u|_{\theta=\theta_0} = 0, & (r_1 \leq r \leq r_2) & (3.154) \\ u|_{r=r_1} = \varphi(\theta), \quad u|_{r=r_2} = \psi(\theta), & (0 \leq \theta \leq \theta_0) & (3.155) \end{cases}$$

为此, 先求满足方程(3.153)和边界条件(3.154)的变量可分离的非平凡解。以 $u = R(r)\Theta(\theta)$ 代入方程可得

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda \quad (3.156)$$

由(3.156)以及边界条件(3.155)可得

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0 \quad (3.157)$$

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(\theta_0) = 0 \end{cases} \quad (3.158)$$

特征值问题(3.158)的特征值和对应的特征函数分别为

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{\theta_0^2}, \quad \Theta = \Theta_n(\theta) = \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.159)$$

把 $\lambda = \lambda_n$ 代入方程(3.157)得

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \left(\frac{n\pi}{\theta_0}\right)^2 R(r) = 0 \quad (3.160)$$

(3.160)是一个Euler型的常微分方程。引进自变量的变换 $\rho = \ln r$, 则(3.160)化为

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} - \left(\frac{n\pi}{\theta_0}\right)^2 R = 0$$

由上式解得

$$R = R_n = A_n e^{\frac{n\pi}{\theta_0} \rho} + B_n e^{-\frac{n\pi}{\theta_0} \rho} = A_n r^{\frac{n\pi}{\theta_0}} + B_n r^{-\frac{n\pi}{\theta_0}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.161)$$

原问题(3.153)—(3.155)的解可表示成这些变量可分离特解的叠加,

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r^{\frac{n\pi}{\theta_0}} + B_n r^{-\frac{n\pi}{\theta_0}} \right) \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0} \quad (3.162)$$

由边界条件(3.155)得

$$\begin{cases} \varphi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r_1^{\frac{n\pi}{\theta_0}} + B_n r_1^{-\frac{n\pi}{\theta_0}} \right) \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0} \\ \psi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r_2^{\frac{n\pi}{\theta_0}} + B_n r_2^{-\frac{n\pi}{\theta_0}} \right) \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0} \end{cases} \quad (3.163)$$

由(3.163)得

$$\begin{cases} A_n r_1^{\frac{n\pi}{\theta_0}} + B_n r_1^{-\frac{n\pi}{\theta_0}} = \tilde{\varphi}_n = \frac{2}{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \varphi(\theta) \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0} d\theta \\ A_n r_2^{\frac{n\pi}{\theta_0}} + B_n r_2^{-\frac{n\pi}{\theta_0}} = \tilde{\psi}_n = \frac{2}{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \psi(\theta) \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0} d\theta \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.164)$$

由(3.164)可解得

$$A_n = \Delta_n^{(1)} / \Delta_n, \quad B_n = \Delta_n^{(2)} / \Delta_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.165)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \begin{vmatrix} r_1^{\frac{n\pi}{\theta_0}} & r_1^{-\frac{n\pi}{\theta_0}} \\ r_2^{\frac{n\pi}{\theta_0}} & r_2^{-\frac{n\pi}{\theta_0}} \end{vmatrix} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{\frac{n\pi}{\theta_0}} - \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{\frac{n\pi}{\theta_0}} \\ \Delta_n^{(1)} &= \begin{vmatrix} \tilde{\varphi}_n & r_1^{-\frac{n\pi}{\theta_0}} \\ \tilde{\psi}_n & r_2^{-\frac{n\pi}{\theta_0}} \end{vmatrix} = \tilde{\varphi}_n r_2^{-\frac{n\pi}{\theta_0}} - \tilde{\psi}_n r_1^{-\frac{n\pi}{\theta_0}} \\ \Delta_n^{(2)} &= \begin{vmatrix} r_1^{\frac{n\pi}{\theta_0}} & \tilde{\varphi}_n \\ r_2^{\frac{n\pi}{\theta_0}} & \tilde{\psi}_n \end{vmatrix} = \tilde{\psi}_n r_1^{\frac{n\pi}{\theta_0}} - \tilde{\varphi}_n r_2^{\frac{n\pi}{\theta_0}} \end{aligned} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.166)$$

下面讨论两种特殊情况。

(1) $r \rightarrow 0$, 此时问题(3.153)—(3.155)化为扇形区域中的问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & (r < r_2, 0 < \theta < \theta_0) \\ u|_{\theta=0} = u|_{\theta=\theta_0} = 0, & (r \leq r_2) \\ u|_{r=r_2} = \psi(\theta), & (0 \leq \theta \leq \theta_0) \end{cases} \quad (3.167)$$

$u|_{r=0}$ 的有界性要求(3.161)中的 $R_n(r)$ 有界, 这导致(3.161)中的 $B_n = 0$, 故此时有

$$R_n(r) = A_n r^{\frac{n\pi}{\theta_0}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.168)$$

因此问题(3.167)的解应表示成

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\frac{n\pi}{\theta_0}} \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0} \quad (3.169)$$

由(3.167)的最后一个边界条件得

$$\psi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r_2^{\frac{n\pi}{\theta_0}} \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0} \quad (3.170)$$

由(3.170)得

$$A_n = \tilde{\psi}_n r_2^{-\frac{n\pi}{\theta_0}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.171)$$

- (2) 当 $r_2 \rightarrow \infty$ 时, 问题(3.153)—(3.155)的求解区域为角状区域去掉一个扇形区域后所得到的一个无界区域。若在无穷远点施加一个解有界的条件, 则问题(3.153)—(3.155)化为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & (r > r_1, 0 < \theta < \theta_0) \\ u|_{\theta=0} = u|_{\theta=\theta_0} = 0, & (r \geq r_1) \\ u|_{r=r_1} = \varphi(\theta), \quad u|_{r=\infty} \text{有界}, & (0 \leq \theta \leq \theta_0) \end{cases} \quad (3.172)$$

$u|_{r=\infty}$ 有界要求(3.161)中的 $R_n(r)$ 有界, 这导致(3.161)中的 $A_n = 0$, 故此时有

$$R_n(r) = B_n r^{-\frac{n\pi}{\theta_0}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.173)$$

因此问题(3.172)的解应表示成

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{-\frac{n\pi}{\theta_0}} \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0} \quad (3.174)$$

由(3.174)的倒数第二个边界条件得

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n r_1^{-\frac{n\pi}{\theta_0}} \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0} \quad (3.175)$$

由(3.175)得

$$B_n = \tilde{\varphi}_n r_1^{\frac{n\pi}{\theta_0}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.176)$$

2. 非齐次方程齐次边界条件问题的解法

类似于直角坐标系的情形, 我们可用特征函数展开法求解非齐次方程问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = f(r, \theta), & (r_1 < r < r_2, 0 < \theta < \theta_0) \\ u|_{\theta=0} = u|_{\theta=\theta_0} = 0, & (r_1 \leq r \leq r_2) \\ u|_{r=r_1} = \varphi(\theta), \quad u|_{r=r_2} = \psi(\theta), & (0 \leq \theta \leq \theta_0) \end{cases} \quad (3.177)$$

为此, 我们把方程右端 $f(r, \theta)$, 边界条件中的 $\varphi(\theta)$ 和 $\psi(\theta)$ 以及解 $u(r, \theta)$ 都关于正交函数系 $\{\sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0}, n = 1, 2, \dots\}$ 进行Fourier展开,

$$\begin{cases} f(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(r) \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0}, & \varphi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_n \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0}, & \psi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\psi}_n \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0} \\ u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(r) \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0} \end{cases} \quad (3.178)$$

其中系数 $\tilde{f}_n(r)$, $\tilde{\varphi}_n$ 和 $\tilde{\psi}_n$ 为已知,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n(r) &= \frac{2}{\theta_0} \int_0^{\theta_0} f(r, \theta) \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0} d\theta \\ \tilde{\varphi}_n &= \frac{2}{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \varphi(\theta) \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0} d\theta \\ \tilde{\psi}_n &= \frac{2}{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \psi(\theta) \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0} d\theta, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

把(3.178)代入(3.177)的方程和最后两个边界条件, 并比较各Fourier分量系数, 得 \tilde{u}_n 所满足的常微分方程的边值问题

$$\begin{cases} \tilde{u}_n''(r) + \frac{1}{r}\tilde{u}_n'(r) - \frac{n^2\pi^2}{\theta_0^2} \frac{1}{r^2}\tilde{u}_n(r) = \tilde{f}_n(r) \\ \tilde{u}_n(r_1) = \tilde{\varphi}_n, \quad \tilde{u}_n(r_2) = \tilde{\psi}_n \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.179)$$

我们先求(3.179)的方程的一个特解。为此, 引进自变量的变换 $\rho = \ln r$, 则(3.179)的方程化为

$$\frac{d^2\tilde{u}_n}{d\rho^2} - \frac{n^2\pi^2}{\theta_0^2}\tilde{u}_n = e^{2\rho}\tilde{f}_n(e^\rho) \quad (3.180)$$

类似于求问题(3.85)的方程特解的办法, 用常数变易法或齐次化原理方法可求得方程(3.180)的一个特解为

$$\tilde{u}_n = \frac{\theta_0}{n\pi} \int_{\ln r_1}^{\rho} e^{2\sigma} \tilde{f}_n(e^\sigma) \operatorname{sh} \frac{n\pi(\rho - \sigma)}{\theta_0} d\sigma$$

问题(3.180)的通解为上面的特解加上对应齐次方程的通解,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n &= A_n e^{\frac{n\pi}{\theta_0}\rho} + B_n e^{-\frac{n\pi}{\theta_0}\rho} + \frac{\theta_0}{n\pi} \int_{\ln r_1}^{\rho} e^{2\sigma} \tilde{f}_n(e^\sigma) \operatorname{sh} \frac{n\pi(\rho - \sigma)}{\theta_0} d\sigma \\ &= A_n e^{\frac{n\pi}{\theta_0}\rho} + B_n e^{-\frac{n\pi}{\theta_0}\rho} + \frac{\theta_0}{2n\pi} \int_{\ln r_1}^{\rho} e^{2\sigma} \tilde{f}_n(e^\sigma) \left[e^{\frac{n\pi(\rho - \sigma)}{\theta_0}} - e^{-\frac{n\pi(\rho - \sigma)}{\theta_0}} \right] d\sigma \end{aligned} \quad (3.181)$$

对(3.181)中的积分作变量代换 $\xi = e^\sigma$, 并以 $\rho = \ln r$ 代入上式, 得(3.179)的通解为

$$\tilde{u}_n(r) = A_n r^{\frac{n\pi}{\theta_0}} + B_n r^{-\frac{n\pi}{\theta_0}} + \frac{\theta_0}{2n\pi} \int_{r_1}^r \xi \tilde{f}_n(\xi) \left[\left(\frac{r}{\xi} \right)^{\frac{n\pi}{\theta_0}} - \left(\frac{\xi}{r} \right)^{\frac{n\pi}{\theta_0}} \right] d\xi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.182)$$

其中待定常数 A_n 和 B_n 可由条件 $\tilde{u}_n(r_1) = \tilde{\varphi}_n$, $\tilde{u}_n(r_2) = \tilde{\psi}_n$ ($n = 1, 2, \dots$) 求得。

3. 非齐次边界条件问题的解法

我们可用边界条件齐次化的方法求解非齐次边界条件问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = f(r, \theta), & (r_1 < r < r_2, 0 < \theta < \theta_0) \\ u|_{\theta=0} = \mu(r), \quad u|_{\theta=\theta_0} = \nu(r), & (r_1 \leq r \leq r_2) \\ u|_{r=r_1} = \varphi(\theta), \quad u|_{r=r_2} = \psi(\theta), & (0 \leq \theta \leq \theta_0) \end{cases} \quad (3.183)$$

为此, 我们首先构造一个满足边界条件 $p|_{\theta=0} = \mu(r), p|_{\theta=\theta_0} = \nu(r)$ 的函数 $p(r, \theta) = \mu(r) + \frac{\theta}{\theta_0}[\nu(r) - \mu(r)]$, 然后令 $v(r, \theta) = u(r, \theta) - p(r, \theta)$, 则 $v(r, \theta)$ 满足

$$\begin{cases} v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} = F(r, \theta), & (r_1 < r < r_2, 0 < \theta < \theta_0) \\ v|_{\theta=0} = v|_{\theta=\theta_0} = 0, & (r_1 \leq r \leq r_2) \\ v|_{r=r_1} = \Phi(\theta), \quad v|_{r=r_2} = \Psi(\theta), & (0 \leq \theta \leq \theta_0) \end{cases} \quad (3.184)$$

(3.184)中的 $F(r, \theta)$, $\Phi(\theta)$ 和 $\Psi(\theta)$ 是如下定义的已知函数,

$$\begin{aligned} F(r, \theta) &= f(r, \theta) - \left\{ \mu''(r) + \frac{\theta}{\theta_0}[\nu''(r) - \mu''(r)] \right\} - \frac{1}{r} \left\{ \mu'(r) + \frac{\theta}{\theta_0}[\nu'(r) - \mu'(r)] \right\} \\ \Phi(\theta) &= \varphi(\theta) - \mu(r_1) - \frac{\theta}{\theta_0}[\nu(r_1) - \mu(r_1)] \\ \Psi(\theta) &= \psi(\theta) - \mu(r_2) - \frac{\theta}{\theta_0}[\nu(r_2) - \mu(r_2)] \end{aligned}$$

问题(3.184)可用特征函数展开法求解之。

3.5.2 周期边界条件问题的解法

我们用分离变量法求解圆环上的Laplace方程的边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & (r_1 < r < r_2) \\ u|_{r=r_1} = \varphi(\theta), \quad u|_{r=r_2} = \psi(\theta) \end{cases} \quad (3.185)$$

显然, 问题(3.185)的解 $u(r, \theta)$ 及初始条件 $\varphi(\theta)$ 和 $\psi(\theta)$ 都是 θ 的周期为 2π 的周期函数。首先, 我们求问题(3.185)的方程的具有变量可分离形式的非平凡特解。为此以 $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ 代入(3.185)的方程 (其中 $\Theta(\theta)$ 是 θ 的周期为 2π 的函数), 得

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0 \quad (3.186)$$

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) - \lambda\Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta) \end{cases} \quad (3.187)$$

当 $\lambda < 0$ 时, (3.187)方程的通解为

$$\Theta(\theta) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\theta} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\theta}$$

只有当 $c_1 = c_2 = 0$ 时, 上面函数才有可能为 θ 的周期为 2π 的函数。对应于特征值 $\lambda = \lambda_0 = 0$ 的特征函数可取为 $\Theta = \Theta_0(\theta) = 1$ 。把 $\lambda = 0$ 代入(3.186), 并作自变量变换 $\rho = \ln r$, 得

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} = 0 \quad (3.188)$$

故此时方程(3.186)的解为

$$R = R_0(r) = A_0 + B_0 \rho = A_0 + B_0 \ln r \quad (3.189)$$

因此, 对应于 $\lambda = 0$ 的变量可分离形式的非平凡特解为

$$u_0(r, \theta) = R_0(r)\Theta_0(\theta) = A_0 + B_0 \ln r \quad (3.190)$$

当 $\lambda > 0$ 时, (3.187) 方程的通解为

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\theta)$$

上面函数仅当 $\sqrt{\lambda} = n$, 即仅当 $\lambda = \lambda_n = n^2 (n = 1, 2, \dots)$ 时, 才可能是 θ 的周期为 2π 的函数, 对应的线性无关的特征函数有两个:

$$\Theta_n^{(1)}(\theta) = \cos n\theta, \quad \Theta_n^{(2)}(\theta) = \sin n\theta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.191)$$

以 $\lambda = n^2$ 代入(3.186)可得

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0 \quad (3.192)$$

上面方程的通解为

$$R_n(r) = \alpha_n r^n + \beta_n r^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.193)$$

故对应于特征值 $\lambda_n = n^2$, (3.185) 的线性无关的变量可分离形式的特解有两个:

$$u_n^{(1)}(r, \theta) = (A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\theta, \quad u_n^{(2)}(r, \theta) = (C_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\theta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.194)$$

问题(3.185)的解可表示成 $u_0(r, \theta)$, $u_n^{(1)}(r, \theta)$, $u_n^{(2)}(r, \theta) (n = 1, 2, \dots)$ 的叠加,

$$u(r, \theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\theta + (C_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\theta] \quad (3.195)$$

由(3.185)的边界条件得

$$\begin{cases} \varphi(\theta) = A_0 + B_0 \ln r_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n r_1^n + B_n r_1^{-n}) \cos n\theta + (C_n r_1^n + D_n r_1^{-n}) \sin n\theta] \\ \psi(\theta) = A_0 + B_0 \ln r_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n r_2^n + B_n r_2^{-n}) \cos n\theta + (C_n r_2^n + D_n r_2^{-n}) \sin n\theta] \end{cases} \quad (3.196)$$

由(3.196)可得

$$\begin{cases} A_0 + B_0 \ln r_1 = \tilde{\varphi}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta \\ A_0 + B_0 \ln r_2 = \tilde{\psi}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) d\theta \end{cases} \quad (3.197)$$

$$\begin{cases} A_n r_1^n + B_n r_1^{-n} = \tilde{\varphi}_n^{(c)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \cos n\theta d\theta \\ A_n r_2^n + B_n r_2^{-n} = \tilde{\psi}_n^{(c)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \cos n\theta d\theta \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.198)$$

$$\begin{cases} C_n r_1^n + D_n r_1^{-n} = \tilde{\varphi}_n^{(s)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \sin n\theta d\theta \\ C_n r_2^n + D_n r_2^{-n} = \tilde{\psi}_n^{(s)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \sin n\theta d\theta \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.199)$$

由(3.197)可解得

$$A_0 = \frac{\tilde{\varphi}_0 \ln r_2 - \tilde{\psi}_0 \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1}, \quad B_0 = \frac{\tilde{\psi}_0 - \tilde{\varphi}_0}{\ln r_2 - \ln r_1}$$

由(3.198)和(3.199)可分别解得

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\tilde{\varphi}_n^{(c)} r_2^{-n} - \tilde{\psi}_n^{(c)} r_1^{-n}}{\Delta_n}, & B_n &= \frac{r_1^n \tilde{\psi}_n^{(c)} - r_2^n \tilde{\varphi}_n^{(c)}}{\Delta_n} \\ C_n &= \frac{\tilde{\varphi}_n^{(s)} r_2^{-n} - \tilde{\psi}_n^{(s)} r_1^{-n}}{\Delta_n}, & D_n &= \frac{r_1^n \tilde{\psi}_n^{(s)} - r_2^n \tilde{\varphi}_n^{(s)}}{\Delta_n}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

其中

$$\Delta_n = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n$$

下面讨论两种特殊情况。

(1) $r_1 \rightarrow 0$, 此时问题(3.185)化为半径为 r_2 的圆内问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & (r < r_2) \\ u|_{r=r_2} = \psi(\theta) \end{cases} \quad (3.200)$$

由 $u|_{r=0}$ 的有界性要求, (3.190)中的 $B_0 = 0$, (3.194)中的 $B_n = D_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 故问题(3.200)的解应表示成

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + C_n \sin n\theta) \quad (3.201)$$

由(3.200)的边界条件得

$$\psi(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_2^n (A_n \cos n\theta + C_n \sin n\theta) \quad (3.202)$$

因此, 解的表达式(3.201)中的系数 A_0, A_n, C_n ($n = 1, 2, \dots$)为

$$A_0 = \tilde{\psi}_0, \quad A_n = \tilde{\psi}_n^{(c)} r_2^{-n}, \quad C_n = \tilde{\psi}_n^{(s)} r_2^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

(2) $r_2 \rightarrow \infty$, 若再要求 $u|_{r=\infty}$ 有界, 则问题(3.185)就化为半径为 r_1 的圆外问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & (r > r_1) \\ u|_{r=r_1} = \varphi(\theta), \quad u|_{r=\infty} \text{有界} \end{cases} \quad (3.203)$$

由 $u|_{r=\infty}$ 的有界性要求, (3.190)中的 $B_0 = 0$, (3.194)中的 $A_n = C_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 故问题(3.203)的解应表示成

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (B_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) \quad (3.204)$$

由(3.203)的边界条件得

$$\varphi(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_1^{-n} (B_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) \quad (3.205)$$

因此, 解的表达式(3.204)中的系数 A_0, B_n, D_n ($n = 1, 2, \dots$)为

$$A_0 = \tilde{\varphi}_0, \quad B_n = \tilde{\varphi}_n^{(c)} r_1^n, \quad D_n = \tilde{\varphi}_n^{(s)} r_1^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

对于非齐次方程的问题, 我们可用类似的特征函数展开法求解, 这里就不再赘述了。

习题3.5

用分离变量法求解定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, & (r_1 < r < r_2, 0 < \theta < \theta_0) \\ u|_{\theta=0} = u|_{\theta=\theta_0} = 0, & (r_1 \leq r \leq r_2) \\ u|_{r=r_1} = \varphi(\theta), \quad u|_{r=r_2} = \psi(\theta), & (0 \leq \theta \leq \theta_0) \end{cases}$$

§3.6 高维曲线坐标系下的分离变量法、球函数和柱函数

3.6.1 Bessel方程和Legendre方程的导出

1. Bessel方程的导出

我们打算用分离变量法求解圆盘中热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 \nabla^2 u = a^2 (u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}), & (r < b, t > 0) \\ u|_{r=b} = 0, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = f(r, \theta), & (r \leq b) \end{cases} \quad (3.206)$$

为此首先求方程满足边界条件的具有变量可分离形式的非平凡解。把 $u(r, \theta, t) = V(r, \theta)T(t)$ 代入(3.206)的方程, 得

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{V_{rr} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{\theta\theta}}{V(r, \theta)} = -\lambda \quad (3.207)$$

由(3.207)和(3.206)的边界条件得

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (3.208)$$

$$\begin{cases} r^2 V_{rr} + rV_r + V_{\theta\theta} + \lambda r^2 V(r, \theta) = 0 \\ V|_{r=b} = 0 \end{cases} \quad (3.209)$$

我们用分离变量法求解偏微分方程的特征值问题(3.209)。为此,先求(3.209)的具有变量可分离形式的非零解。把 $V(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ 代入(3.209)的方程得

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r) + \lambda r^2 R(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \mu \quad (3.210)$$

由(3.210)及(3.209)的边界条件得

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - \mu)R(r) = 0 \\ R(b) = 0 \end{cases} \quad (3.211)$$

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \mu\Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta) \end{cases} \quad (3.212)$$

问题(3.212)的特征值为 $\mu = \mu_0 = 0$, $\mu = \mu_n = n^2 (n = 1, 2, \dots)$; 对应于 $\mu = 0$ 的特征函数为 $\Theta_0(\theta) = 1$; 对应于 $\mu = n^2$ 的线性无关特征函数有两个, 分别是 $\Theta = \Theta_n^{(1)}(\theta) = \cos n\theta$ 和 $\Theta = \Theta_n^{(2)}(\theta) = \sin n\theta (n = 1, 2, \dots)$ 。把 $\mu = n^2 (n = 1, 2, \dots)$ 代入问题(3.210)得

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2)R(r) = 0 \\ R(b) = 0 \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.213)$$

令 $x = \sqrt{\lambda}r$, $R(r) = R(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}) = y(x)$, (3.213)化为

$$\begin{cases} x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \\ y(\sqrt{\lambda}b) = 0 \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.214)$$

对于问题(3.214)来说,显然要求 $y(x)$ 在 $x = 0$ 近旁有界。我们称如下形式的方程

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0 \quad (3.215)$$

为 ν 阶Bessel方程 (这里的 ν 一般来说不一定限于整数)。我们的目的是求Bessel方程(3.215)的非零解。因为(3.215)是从柱坐标问题的分离变量法得到的,故(3.215)的一切非零解都称为柱函数。

2. Legendre方程的导出

我们用分离变量法求解球中Laplace方程的Dirichlet问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad (r < a) \\ u|_{r=a} = f(\varphi, \theta) \end{cases} \quad (3.216)$$

为此, 首先求方程具有变量可分离形式的非平凡特解. 把 $u(r, \varphi, \theta) = V(r, \varphi)\Theta(\theta)$ 代入(3.216)的方程, 得

$$\frac{\sin^2 \varphi \left(r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)}{V(r, \varphi)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda$$

故有

$$r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) - \frac{\lambda}{\sin^2 \varphi} V(r, \varphi) = 0 \quad (3.217)$$

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda \Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta) \end{cases} \quad (3.218)$$

问题(3.218)的特征值为 $\lambda_0 = 0$ 及 $\lambda_n = n^2 (n = 1, 2, \dots)$; 对应于特征值 $\lambda = 0$ 的特征函数为 $\Theta_0(\theta) = 1$, 对应于 $\lambda = n^2$ 的线性无关特征函数有两个, 分别是 $\Theta_n^{(1)}(\theta) = \cos n\theta$, $\Theta_n^{(2)}(\theta) = \sin n\theta (n = 1, 2, \dots)$. 把 $\lambda = n^2 (n = 0, 1, 2, \dots)$ 代入(3.217)得

$$r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) - \frac{n^2}{\sin^2 \varphi} V(r, \varphi) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.219)$$

我们求(3.219)变量可分离形式的非平凡特解. 把 $V(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ 代入上面方程, 得

$$-\frac{\frac{1}{\sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\sin \varphi \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) - \frac{n^2}{\sin^2 \varphi} \Phi(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \frac{r^2 R''(r) + 2r R'(r)}{R(r)} = \mu$$

故有

$$r^2 R''(r) + 2r R'(r) - \mu R(r) = 0 \quad (3.220)$$

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\sin \varphi \frac{d\Phi(\varphi)}{d\varphi} \right) + \left(\mu - \frac{n^2}{\sin^2 \varphi} \right) \Phi(\varphi) = 0 \quad (3.221)$$

令 $x = \cos \varphi$, 由于 $\varphi \in [0, \pi]$, 故 $x \in [-1, 1]$. 于是有 $\varphi = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$. 记 $y(x) = \Phi(\arccos x)$, $\mu = l(l+1)$, 则(3.221)化为

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{n^2}{1-x^2} \right] y(x) = 0 \quad (3.222)$$

我们称方程(3.222)为缔合Legendre方程. 对于与方位角 θ 无关的轴对称问题, 有 $n = 0$, 此时缔合Legendre方程(3.222)就化为Legendre方程

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + l(l+1)y(x) = 0 \quad (3.223)$$

我们的目的是求Legendre方程在 $[-1, 1]$ 中的有界非零解. 因(3.222)和(3.223)都是从球坐标问题的分离变量法得到的, 故它们的一切非零解都称为球函数.

注意, 若一开始设 $u(r, \varphi, \theta) = R(r)V(\varphi, \theta)$, 则也能把分离变量过程进行到底, 但一开始设 $u(r, \varphi, \theta) = V(r, \theta)\Phi(\varphi)$ 则不能把分离变量过程进行到底.

3.6.2 二阶线性齐次常微分方程的级数解法

1. 二阶线性齐次常微分方程的常点和正则奇点

对于以复变量 z 为自变量的二阶线性齐次常微分方程

$$w''(z) + p(z)w'(z) + q(z)w(z) = 0 \quad (3.224)$$

若 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在 z_0 点解析, 则称 z_0 点为方程(3.224)的常点。当 z_0 点为(3.224)的常点时, 可把解展开成 $z = z_0$ 点的幂级数, 代入(3.224)可得方程的解。由于解可表示成 z_0 点的幂级数, 故解在 z_0 点近旁解析。

设 z_0 为 $p(z)$ 或 $q(z)$ 的奇点。若 z_0 最多为 $p(z)$ 的一阶极点和 z_0 最多为 $q(z)$ 的二阶极点, 则称 z_0 为方程(3.224)的正则奇点; 否则, 就称 z_0 为方程(3.224)的非正则奇点。本书只讨论方程(3.224)在正则奇点的级数解法(有关内容可参看汪德新编《数学物理方法》, 华中科技大学出版社, 2003)。

2. 二阶线性齐次常微分方程在正则奇点近旁的级数解法

设 z_0 为方程(3.224)的正则奇点。求方程(3.224)在 z_0 点近旁解的方法分为以下三步。

(1) 以

$$w(z) = (z - z_0)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad c_0 \neq 0 \quad (3.225)$$

代入(3.224), 比较最低次幂的系数, 并利用 $c_0 \neq 0$ 条件, 可得关于 ρ 的一个一元二次方程。求出这个一元二次方程的两个根 ρ_1 和 ρ_2 , 并设 $\rho_1 > \rho_2$ 。

(2) 以

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad (3.226)$$

代入方程(3.225), 比较各次幂的系数, 可求出用 c_0 表示的 c_1, c_2, \dots , 从而确定出一个解 $w_1(z)$ (依赖于 c_0)。

(3) 若 $\rho_1 - \rho_2 \neq$ 整数, 则以

$$w_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k, \quad d_0 \neq 0 \quad (3.227)$$

代入方程, 可求出另一个解 $w_2(z)$ (依赖于 d_0); 若 $\rho_1 - \rho_2 =$ 整数, 则以

$$w_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k + a w_1(z) \ln(z - z_0), \quad d_0 \neq 0 \quad (3.228)$$

代入(3.224), 可求出用 c_0 表示的 a, d_1, d_2, \dots , 从而确定出另一个解 $w_2(z)$ (依赖于 d_0)。

例 求方程

$$zw''(z) - w(z) = 0 \quad (3.229)$$

在 $z = 0$ 近旁的通解。

【解】 令

$$w(z) = z^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad c_0 \neq 0 \quad (3.230)$$

代入方程(3.229)可得

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k + \rho)(k + \rho - 1)c_k z^{k+\rho-1} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho} = 0$$

上式可写成

$$\rho(\rho - 1)c_0 z^{\rho-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [(k + \rho)(k + \rho + 1)c_{k+1} - c_k] z^{k+\rho} = 0 \quad (3.231)$$

由于 $c_0 \neq 0$, 由上式可得 $\rho(\rho - 1) = 0$. 因此有 $\rho_1 = 1, \rho_2 = 0$. 以 $\rho = \rho_1 = 1$ 代入上式, 可得

$$c_{k+1} = \frac{c_k}{(k+1)(k+2)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

即

$$c_1 = \frac{1}{2 \cdot 1} c_0, \quad c_2 = \frac{1}{3 \cdot 2} c_1 = \frac{1}{3! \cdot 2!} c_0, \quad c_3 = \frac{1}{4 \cdot 3} c_2 = \frac{1}{4! \cdot 3!} c_0, \dots$$

一般的, 我们有

$$c_k = \frac{1}{(k+1)! \cdot k!} c_0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.232)$$

记

$$\hat{w}_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)! \cdot k!} z^{k+1} \quad (3.233)$$

则方程(3.229)对应于

$$w_1(z) = z^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad c_0 \neq 0$$

的解为

$$w_1(z) = c_0 \hat{w}_1(z)$$

由于 $\rho_1 - \rho_2 = 1$ 为整数, 故方程(3.229)的另一个线性无关特解可表示为

$$w_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k + a w_1(z) \ln z = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k + A \hat{w}_1(z) \ln z, \quad d_0 \neq 0 \quad (3.234)$$

其中, $A = a c_0$. 把(3.234)代入方程(3.229)得

$$A[z\hat{w}_1''(z) - \hat{w}_1(z)] \ln z + \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)d_k z^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k + 2A\hat{w}_1'(z) - \frac{A}{z}\hat{w}_1(z) = 0 \quad (3.235)$$

由于 $\hat{w}_1(z)$ 为方程(3.229)的一个特解,故上式第一项为零。把 $\hat{w}_1(z)$ 的表达式(3.233)代入(3.235)其余各有关项,得

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)d_{k+1}z^k + A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{(k+1)! \cdot k!} z^k - \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k = 0$$

上式可等价地写成

$$A - d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[k(k+1)d_{k+1} + \frac{(2k+1)A}{(k+1)! \cdot k!} - d_k \right] z^k = 0 \quad (3.236)$$

由(3.236)得

$$A = d_0, \quad d_{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} d_k - \frac{2k+1}{(k+1)k \cdot (k+1)! \cdot k!} A, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.237)$$

即

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{1}{2 \cdot 1} d_1 - \frac{3}{2 \cdot 1 \cdot 2! \cdot 1!} A \\ d_3 &= \frac{1}{3 \cdot 2} d_2 - \frac{5}{3 \cdot 2 \cdot 3! \cdot 2!} A = \frac{1}{3! \cdot 2!} d_1 - \frac{A}{3! \cdot 2!} \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{3 \cdot 2} \right) \\ d_4 &= \frac{1}{4 \cdot 3} d_3 - \frac{7}{4 \cdot 3 \cdot 4! \cdot 3!} A = \frac{1}{4! \cdot 3!} d_1 - \frac{A}{4! \cdot 3!} \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{3 \cdot 2} + \frac{7}{4 \cdot 3} \right) \end{aligned}$$

一般情况有

$$d_k = \frac{1}{k! \cdot (k-1)!} d_1 - A \frac{1}{k! \cdot (k-1)!} \sum_{j=2}^k \frac{2j-1}{j(j-1)}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (3.238)$$

所以

$$w_2(z) = A \left[1 - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k! \cdot (k-1)!} \sum_{j=2}^k \frac{2j-1}{j(j-1)} \right) z^k + \hat{w}_1(z) \ln z \right] + d_1 \hat{w}_1(z)$$

记

$$\hat{w}_2(z) = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k! \cdot (k-1)!} \sum_{j=2}^k \frac{2j-1}{j(j-1)} \right) z^k + \hat{w}_1(z) \ln z \quad (3.239)$$

则方程(3.229)的通解为(令 $B = c_0 + d$)

$$w(z) = B \hat{w}_1(z) + A \hat{w}_2(z)$$

其中, A, B 为任意常数。 ■

3.6.3 Legendre方程的级数解、Legendre多项式

1. Legendre方程的级数解

现在用级数方法求解Legendre方程(3.223)在 $x = 0$ 近旁的解。此时的 $p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$, $q(x) = \frac{l(l+1)}{1-x^2}$ 。由于 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 $x = 0$ 解析, $x = 0$ 为方程(3.223)的常点, 故可把方程(3.223)的解 $y(x)$ 展开成 $x = 0$ 点的幂级数

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (3.240)$$

把(3.240)代入(3.223)得

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{(k+2)(k+1)c_{k+2} - [k(k+1) - l(l+1)]c_k\}x^k = 0 \quad (3.241)$$

由(3.241)可得

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} = [k(k+1) - l(l+1)]c_k = (k-l)(k+l+1)c_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

即

$$c_{k+2} = \frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.242)$$

由(3.242)得

$$c_2 = -\frac{l(l+1)}{2}c_0, \quad c_4 = \frac{(4-l-2)(4+l-1)}{4 \cdot 3}c_2 = -\frac{(4-l-2)(4-l+1)l(l+1)}{4!}c_0, \dots$$

一般情况我们有

$$c_{2k} = \frac{\prod_{j=1}^k (2j-l-2)(2j+l-1)}{(2k)!}c_0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.243)$$

类似地我们有

$$c_{2k+1} = \frac{\prod_{j=1}^k (2j-l-1)(2j+l)}{(2k+1)!}c_1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.244)$$

因此Legendre方程(3.223)的通解为

$$y(x) = c_0 y_0(x) + c_1 y_1(x)$$

其中 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 为方程(3.223)的两个线性无关的特解, 它们的定义是

$$y_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^k (2j-l-2)(2j+l-1)}{(2k)!} x^{2k} \quad (3.245)$$

$$y_1(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^k (2j-l-1)(2j+l)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (3.246)$$

易知, 当 $l \neq$ 整数时, (3.245)和(3.246)均为无穷级数, 由比较判别法可得这两个幂级数的收敛半径都是1, 而且在 $x = \pm 1$ 处, 这两个级数均发散。

然而, 在实际问题中常常需要用到Legendre方程(3.223)在 $[-1, 1]$ 中的有界解。那么, 当 l 取什么值的时候, 级数(3.245)和(3.246)才能中断为多项式(从而有界)呢? 显然, 当 $l = 2n$ 时, 级数(3.245)的系数成立 $c_{2k} = 0 (k = n + 1, n + 2, \dots)$, 此时, $y_0(x)$ 退化为一个 $2n$ 次多项式,

$$y_0(x) = P_{2n}(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{j=1}^k (2j - l - 2)(2j + l - 1)}{(2k)!} x^{2k} \quad (3.247)$$

此时, $y_1(x)$ 仍为无穷级数, 它在 $x = \pm 1$ 无界。

类似地, 当 $l = 2n + 1$ 时, 级数(3.246)退化为一个 $2n + 1$ 次多项式,

$$y_1(x) = P_{2n+1}(x) = x + \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{j=1}^k (2j - l - 1)(2j + l)}{(2k + 1)!} x^{2k+1} \quad (3.248)$$

此时, $y_0(x)$ 仍为无穷级数, 它在 $x = \pm 1$ 无界。

2. Legendre多项式

我们称由(3.247)定义的多项式 $P_{2n}(x)$ 为 $2n$ 次Legendre多项式, 由(3.248)定义的多项式 $P_{2n+1}(x)$ 为 $2n + 1$ 次Legendre多项式。显然, $P_{2n}(x)$ 为偶次多项式, $P_{2n+1}(x)$ 为奇次多项式。由Legendre多项式的定义可得

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \dots$$

一般地, Legendre多项式成立如下的递推公式,

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.249)$$

知道了 $P_0(x)$ 和 $P_1(x)$, 由递推公式(3.249)可由低到高逐次计算出各种幂次的Legendre多项式。

把 x 视为参数, 把 $(1 - xt + t^2)^{\frac{1}{2}}$ 看成 t 的解析函数, 它在 $t = 0$ 处的幂级数展开式的 t^n 的系数就是 n 次Legendre多项式

$$(1 - xt + t^2)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) t^n \quad (3.250)$$

我们称 $(1 - xt + t^2)^{\frac{1}{2}}$ 为Legendre多项式的母函数。

另外, Legendre多项式还有如下导数形式的定义,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (3.251)$$

由(3.251)不难证明

$$P_n(1) = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.252)$$

(见习题)

此外, 由(3.251)不难证明Legendre多项式是 $[-1, 1]$ 上的正交多项式,

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1}, & n = m \end{cases} \quad (3.253)$$

因此, $[-1, 1]$ 上的任何平方可积函数 $f(x)$ 都可按 $\{P_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ 进行Fourier展开,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \quad (3.254)$$

其中

$$c_n = \frac{2}{2n+1} \int_{-1}^1 f(x)P_n(x)dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.255)$$

这里级数(3.254)的收敛是在 $\|f(x) - \sum_{k=1}^n c_k P_k(x)\|_2 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 意义下的收敛。当 $f(x)$ 充分光滑时, 级数(3.254)的收敛可以是一致收敛意义下的收敛。

3.6.4 Bessel方程的级数解、Bessel函数

1. Bessel方程的级数解

现在, 我们用级数方法求Bessel方程(3.216)的级数解。这里, 我们假设 $\nu \geq 0$, 但 ν 可以不是整数。此时的 $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x^2}$, $x = 0$ 分别是 $p(x)$ 的一阶极点和 $q(x)$ 的二阶极点, 故 $x = 0$ 为方程(3.216)的正则奇点。现在我们用级数方法求方程在 $x = 0$ 近旁的解。根据方程(3.216)正则奇点近旁的级数解法, 首先令

$$y(x) = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_0 \neq 0 \quad (3.256)$$

把(3.256)代入方程(3.216)得

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+\rho)(k+\rho-1) + (k+\rho) - \nu^2] c_k x^{k+\rho} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\rho+2} = 0$$

上式可以写成

$$(\rho^2 - \nu^2)c_0 x^\rho + [(\rho+1)^2 - \nu^2]c_1 x^{\rho+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \{[(\rho+k)^2 - \nu^2]c_k + c_{k-2}\} x^{k+\rho} = 0 \quad (3.257)$$

由 $c_0 \neq 0$ 得 $\rho^2 - \nu^2 = 0$, 故有 $\rho_1 = \nu$, $\rho_2 = -\nu$ 。然后, 令

$$y_1(x) = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\nu+k} \quad (3.258)$$

把(3.258)代入方程(3.216)得

$$(1 + 2\nu)c_1x^{\nu+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \{[(\nu + k)^2 - \nu^2]c_k + c_{k-2}\}x^{\nu+k} = 0 \quad (3.259)$$

由(3.259)得

$$(1 + 2\nu)c_1 = 0, \quad c_k = -\frac{1}{(\nu + k)^{-\nu^2}}c_{k-2} = -\frac{1}{k(2\nu + k)}c_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (3.260)$$

由(3.260)得

$$c_1 = 0, \quad c_3 = -\frac{1}{3(2\nu + 3)}c_1 = 0, \quad c_5 = -\frac{1}{5(2\nu + 5)}c_3 = 0, \dots$$

$$c_2 = -\frac{1}{2(2\nu + 2)}c_0 = -\frac{1}{2^2(\nu + 1)}c_0, \quad c_4 = -\frac{1}{4(2\nu + 4)}c_2 = \frac{(-1)^2}{2^4 \cdot 2!(\nu + 2)(\nu + 1)}c_0, \dots$$

一般地, 我们有

$$\begin{cases} c_{2k+1} = 0, & k = 0, 1, 2, \dots \\ c_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} \cdot k!(\nu+k)(\nu+k-1)\dots(\nu+1)}c_0 = \frac{(-1)^k \Gamma(\nu+1)}{2^{2k} \cdot k! \Gamma(\nu+k+1)}, & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.261)$$

上式中我们用到了 Γ 函数的性质: 对任意复变量 z , 成立 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ 。把(3.261)代入(3.258), 得Bessel方程的第一个非零解

$$y_1(x) = c_0 \hat{y}_1(x) \quad (3.262)$$

其中,

$$\hat{y}_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\nu+1)}{2^{2k} k! \Gamma(\nu+k+1)} x^{\nu+2k} \quad (3.263)$$

当 $\rho_1 - \rho_2 = 2\nu \neq$ 整数时, 令

$$y_2(x) = x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^{-\nu+k}, \quad d_0 \neq 0 \quad (3.264)$$

把(3.264)代入方程(3.216)得

$$(1 - 2\nu)d_1x^{-\nu+1} + \sum_{k=2}^{\infty} [k(-2\nu + k)d_k + d_{k-2}]x^{-\nu+k} = 0 \quad (3.265)$$

由(3.265)得

$$\begin{cases} d_{2k+1} = 0, & k = 0, 1, 2, \dots \\ d_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (-\nu+k)(-\nu+k-1)\dots(-\nu+1)} d_0 = \frac{(-1)^k \Gamma(-\nu+1)}{2^{2k} k! \Gamma(-\nu+k+1)} d_0, & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.266)$$

把(3.266)代入(3.264), 我们便得到了方程(3.216)的第二个非零解

$$y_2(x) = d_0 \hat{y}_2(x) \quad (3.267)$$

其中

$$\hat{y}_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(-\nu + 1)}{2^{2k} k! \Gamma(-\nu + k + 1)} x^{-\nu+2k} \quad (3.268)$$

这样, 当 $\nu \geq 0$, $\nu - (-\nu) = 2\nu \neq$ 整数时, 我们就得到了 Bessel 方程(3.216)的两个非零解 $\hat{y}_1(x)$ 和 $\hat{y}_2(x)$ 。由于此时有

$$\begin{aligned} \hat{y}_1(x) &= x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\nu + 1)}{2^{2k} k! \Gamma(\nu + k + 1)} x^{2k} \rightarrow 0, & (x \rightarrow 0) \\ \hat{y}_2(x) &= x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(-\nu + 1)}{2^{2k} k! \Gamma(-\nu + k + 1)} x^{2k} \rightarrow \infty, & (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

故 $\hat{y}_1(x)$ 和 $\hat{y}_2(x)$ 线性无关, 它们的线性组合就构成了 Bessel 方程的通解。

2. Bessel 函数 (第一类柱函数)

在(3.262)中, 令 $c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$, 便得 ν 阶 Bessel 函数

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \quad (3.269)$$

在(3.267)中, 令 $d_0 = \frac{1}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)}$, 则得 $-\nu$ 阶的 Bessel 函数

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k} \quad (3.270)$$

我们知道, 对一切 $\nu \geq 0$, $J_\nu(x)$ 构成了 Bessel 方程(3.216)的一个非零解。当 $2\nu \neq$ 整数时, $J_{-\nu}(x)$ 构成了 Bessel 方程(3.216)的一个与 $J_\nu(x)$ 线性无关的解。但当 $2\nu =$ 整数时, $J_{-\nu}(x)$ 与 $J_\nu(x)$ 线性相关。例如, 当 $\nu = n$ 时, 成立 $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ 。

3. Neumann 函数 (第二类柱函数)

当 $\nu = n \geq 0$ 为整数时, $J_{-n}(x)$ 与 $J_n(x)$ 线性相关。当然, 此时为了求 Bessel 方程(3.216)的另一个线性无关解, 我们可把

$$y_2(x) = x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k + a J_n(x) \ln x \quad (3.271)$$

代入方程(3.216)来求得 Bessel 方程的这个解, 但这样做太麻烦。此时, 我们宁愿重新定义 Bessel 方程的一个与 $J_n(x)$ 无关的解, 它就是 n 阶 Neumann 函数

$$N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (3.272)$$

注意到 $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, 故(3.272)是一个“ $\frac{0}{0}$ ”型的不定式, 它可用L'hospital法则求得,

$$\begin{aligned} N_n(x) &= \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \cos(\nu\pi) - \nu J_\nu(x) \sin(\nu\pi) - \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}}{\pi \cos(\nu\pi)} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right] \Big|_{\nu=n} \end{aligned} \quad (3.273)$$

下面证明 $N_n(x)$ 是 n 阶Bessel方程的一个解。当 $\nu \neq n$, ν 在 n 近旁变化时, 对 $J_\nu(x)$ 所满足的Bessel方程

$$x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x) = 0$$

关于 ν 求导, 得

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} + x \frac{d}{dx} \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} + (x^2 - \nu^2) \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - 2\nu J_\nu(x) = 0 \quad (3.274)$$

对 $J_{-\nu}(x)$ 所满足的Bessel方程

$$x^2 J_{-\nu}''(x) + x J_{-\nu}'(x) + (x^2 - \nu^2) J_{-\nu}(x) = 0$$

关于 ν 求导, 得

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} + x \frac{d}{dx} \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} + (x^2 - \nu^2) \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} - 2\nu J_{-\nu}(x) = 0 \quad (3.275)$$

(3.274)式减去(3.275)式的 $(-1)^n$ 倍, 得

$$\left[x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + (x^2 - \nu^2) \right] \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right] - 2\nu [J_\nu(x) - (-1)^n J_{-\nu}(x)] = 0$$

上面等式左边的第一个方括号为Bessel方程中的微分算子。在上式中令 $\nu = n$, 并注意到 $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, 便知 $N_n(x)$ 满足Bessel方程。

经过一些复杂的推导(参看有关特征函数的著作), 可得到 $N_n(x)$ 的具体计算公式为

$$\begin{aligned} N_n(x) &= \frac{2}{\pi} J_n(x) \left[\ln \left(\frac{x}{2} \right) + \gamma \right] - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k-n} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot (k+n)!} \left[\sum_{j=0}^{n+k-1} \frac{1}{j+1} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j+1} \right] \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+n} \end{aligned} \quad (3.276)$$

其中, $\gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} - \ln(k+1) \right] \approx 0.5772 \cdots$ 为Euler常数。由(3.276)可得: 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$N_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{x}{2} \right) \rightarrow \infty, \quad N_n(x) \approx \frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2} \right)^{-n} \rightarrow \infty, \quad n = 1, 2, \cdots$$

而 $J_0(0) = 1$, $J_n(0) = 0 (n = 1, 2, \cdots)$, 因此 $N_n(x)$ 与 $J_n(x)$ 线性无关($n = 0, 1, 2, \cdots$)。

4. Hankel函数

我们把第一类和第二类Hankel函数 $H_n^{(1)}(x)$ 和 $H_n^{(2)}(x)$ 定义为 $J_n(x)$ 和 $N_n(x)$ 的复系数线性组合,

$$\begin{cases} H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iN_n(x) \\ H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iN_n(x) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.277)$$

反之, 由 $H_n^{(1)}(x)$ 和 $H_n^{(2)}(x)$ 也可算出 $J_n(x)$ 和 $N_n(x)$,

$$\begin{cases} J_n(x) = \frac{1}{2} [H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x)] \\ N_n(x) = \frac{1}{2i} [H_n^{(1)}(x) - H_n^{(2)}(x)] \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.278)$$

下面介绍柱函数的一些性质。由于Neumann函数和Hankel函数都是由Bessel函数导出的, 本书只介绍Bessel函数的性质。Neumann函数和Hankel函数的性质与Bessel函数的性质相似。

5. Bessel函数的性质

(1) 直接由 $J_\nu(x)$ 的定义出发可得Bessel函数导数的性质

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x) \\ \frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \end{cases} \quad (3.279)$$

算出(3.279)左边的导数, 得

$$\begin{cases} \nu x^{\nu-1} J_\nu(x) + x^\nu J'_\nu(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x) \\ -\nu x^{\nu-1} J_\nu(x) + x^{-\nu} J'_\nu(x) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \end{cases}$$

由上式可解得

$$J_\nu(x) = \frac{x}{2\nu} [J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)] \quad (3.280)$$

$$J'_\nu(x) = \frac{1}{2} [J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)] \quad (3.281)$$

(3.281)就是Bessel函数导数的计算公式。

(2) 由(3.280)可得Bessel函数的递推公式

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x) \quad (3.282)$$

若已求得 $J_0(x), J_1(x)$, 则由(3.282)式可依次求出 $J_2(x), J_3(x), \dots$ 。由Neumann函数和Hankel函数的定义, 知道它们也成立相同的递推关系。

(3) 由Bessel函数的定义, 并利用 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ 可得

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \quad (3.283)$$

利用递推关系(3.282)可得

$$\begin{aligned} J_{\frac{3}{2}} &= \frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{1}{x} \sin x - \cos x \right) \\ J_{-\frac{3}{2}} &= -\frac{1}{x} J_{-\frac{1}{2}}(x) - J_{\frac{1}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{1}{x} \cos x + \sin x \right) \end{aligned} \quad (3.284)$$

以此类推, 可知一切半整数阶的Bessel函数都是初等函数。

(4) 由(3.280)和(3.281)可得

$$J_0'(x) = -J_1(x), \quad (xJ_1(x))' = xJ_0(x) \quad (3.285)$$

(5) 整数阶Bessel函数的母函数。

把 x 看成参数, 由 $e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}$ 关于 t 在 $t=0$ 的去心邻域的Laurent展开式得

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n \quad (3.286)$$

因此, 整数阶Bessel函数的母函数为 $e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}$ 。

(6) 整数阶Bessel函数的零点分布。

由于 $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$, 故若 $x = x_*$ 为 $J_n(x)$ 的零点, 则 $J_n(-x_*) = 0$, 即零点的分布关于原点对称。因此我们只研究 $J_n(x)$ 的非负零点。

我们已知 $J_0(0) = 1, J_n(0) = 0 (n = 1, 2, \dots)$, 故 $x = 0$ 不是 $J_0(x)$ 的零点, 但 $x = 0$ 为 $J_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 的零点。其次, 由于

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad x \rightarrow +\infty \quad (3.287)$$

故 $J_n(x)$ 呈振荡衰减, 周期 $\sim 2\pi$, 它有无穷多个非负零点 $\beta_m^{(n)} (m = 1, 2, \dots)$, 满足

$$0 \leq \beta_1^{(n)} < \beta_2^{(n)} < \beta_3^{(n)} < \dots, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m^{(n)} = +\infty \quad (3.288)$$

此外, 我们还可以证明Bessel函数零点的隔离性质: 在 $J_n(x)$ 的零点 $\beta_m^{(n)}$ 与 $\beta_{m+1}^{(n)}$ 之间有 $J_{n-1}(x)$ 的唯一零点 $\beta_m^{(n-1)}$; 在 $J_{n-1}(x)$ 的零点 $\beta_{m-1}^{(n-1)}$ 与 $\beta_m^{(n-1)}$ 之间有 $J_n(x)$ 的唯一零点 $\beta_m^{(n)}$ 。

(7) Bessel函数的正交性。

由下一节一般理论可知, 对固定的 n (n 为非负整数), 设 $J_n(x)$ 的零点为 $\beta_m^{(n)} (m = 1, 2, \dots)$, 则对任何 $b > 0$, $\left\{ J_n \left(\frac{\beta_m^{(n)}}{b} x \right), m = 1, 2, \dots \right\}$ 是 $[0, b]$ 中带权 x 的正交函数系,

$$\int_0^b x J_n \left(\frac{\beta_m^{(n)}}{b} x \right) J_n \left(\frac{\beta_k^{(n)}}{b} x \right) dx = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ \frac{1}{2} \left[b J_{n+1} \left(\frac{\beta_m^{(n)}}{b} \right) \right]^2, & m = k \end{cases} \quad (3.289)$$

3.6.5 圆盘中热传导方程的解

现在我们回到圆盘中热传导方程定解问题(3.206)的求解。我们先求变量可分离形式的特解 $u(r, \theta, t) = V(r, \theta)T(t)$, 其中 $T(t)$ 满足(3.208), $V(r, \theta)$ 满足定解问题(3.209)。为了求解偏微分方程的特征值问题(3.209), 我们先求它变量可分离形式的解: $V(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, 其中 $R(r)$ 满足定解问题(3.211), $\Theta(\theta)$ 满足定解问题(3.212)。特征值问题(3.212)的特征值为 $\mu_0 = 0, \mu_n = n^2 (n = 1, 2, \dots)$ 。 $\mu = 0$ 对应的特征函数是 $\Theta_0(\theta) = 1$; $\mu = n^2$ 的特征函数有两个, 它们分别是 $\Theta_1^{(n)}(\theta) = \cos n\theta, \Theta_2^{(n)}(\theta) = \sin n\theta (n = 1, 2, \dots)$ 。把 $\mu = n^2 (n = 0, 1, 2, \dots)$ 代入问题(3.211), 并令 $x = \sqrt{\lambda}r, y(x) = R(r) = R(x/\sqrt{\lambda})$, 则问题(3.211)化为问题(3.214)。 $R(r)$ 在 $r = 0$ 近旁有界要求问题(3.214)的解 $y(x)$ 在 $x = 0$ 近旁有界, 因此方程(3.214)的解为 n 阶Bessel函数 $J_n(x)$ 。由(3.214)的边界条件 $y(\sqrt{\lambda}b) = 0$ 得 $J_n(\sqrt{\lambda}b) = 0$, 因此 $\sqrt{\lambda}b$ 必须是 $J_n(x)$ 的非负零点, 即 $\sqrt{\lambda}b = \beta_m^{(n)} (m = 1, 2, \dots)$, 因此对应的问题(3.209)的特征值为

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\beta_m^{(n)}}{b} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.290)$$

问题(3.213)的解为

$$R_n(r) = J_n(\sqrt{\lambda_{n,m}}r) = J_n\left(\frac{\beta_m^{(n)}}{b}r\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.291)$$

因此, 问题(3.209)的变量可分离形式的特征函数为

$$V_{0,m}(r, \theta) = R_0(r)\Theta_0(\theta) = J_0\left(\frac{\beta_m^{(0)}}{b}r\right), \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.292)$$

$$\begin{cases} V_{n,m}^{(1)}(r, \theta) = R_n(r)\Theta_n^{(1)} = J_n\left(\frac{\beta_m^{(n)}}{b}r\right) \cos n\theta \\ V_{n,m}^{(2)}(r, \theta) = R_n(r)\Theta_n^{(2)} = J_n\left(\frac{\beta_m^{(n)}}{b}r\right) \sin n\theta \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.293)$$

把 $\lambda_{n,m}$ 代入方程(3.208), 得解

$$T_{n,m}(t) = \alpha_{n,m}e^{-a^2\lambda_{n,m}t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.294)$$

因此, 问题(3.206)满足方程和齐次边界条件的变量可分离解的一般形式是

$$u_{0,m}(r, \theta, t) = V_{0,m}(r, \theta)T_{0,m}(t) = A_{0,m}e^{-a^2\left(\frac{\beta_m^{(0)}}{b}\right)^2t} J_0\left(\frac{\beta_m^{(0)}}{b}r\right), \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} u_{n,m}^{(1)}(r, \theta, t) = V_{n,m}^{(1)}(r, \theta)T_{n,m}(t) = A_{n,m}e^{-a^2\left(\frac{\beta_m^{(n)}}{b}\right)^2t} J_n\left(\frac{\beta_m^{(n)}}{b}r\right) \cos n\theta \\ u_{n,m}^{(2)}(r, \theta, t) = V_{n,m}^{(2)}(r, \theta)T_{n,m}(t) = B_{n,m}e^{-a^2\left(\frac{\beta_m^{(n)}}{b}\right)^2t} J_n\left(\frac{\beta_m^{(n)}}{b}r\right) \sin n\theta \end{cases} \quad n, m = 1, 2, \dots$$

所以问题(3.206)的解可表示为以上这些特解的叠加,

$$u(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{0,m} e^{-a^2 \left(\frac{\beta_m^{(0)}}{b}\right)^2 t} J_0 \left(\frac{\beta_m^{(0)}}{b} r\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-a^2 \left(\frac{\beta_m^{(n)}}{b}\right)^2 t} J_n \left(\frac{\beta_m^{(n)}}{b} r\right) (A_{n,m} \cos n\theta + B_{n,m} \sin n\theta) \quad (3.295)$$

代入(3.206)的初始条件得

$$f(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{0,m} J_0 \left(\frac{\beta_m^{(0)}}{b} r\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n \left(\frac{\beta_m^{(n)}}{b} r\right) (A_{n,m} \cos n\theta + B_{n,m} \sin n\theta) \quad (3.296)$$

由于 $\{1, \cos n\theta, \sin n\theta, n = 1, 2, \dots\}$ 构成 $\theta \in [0, 2\pi]$ 上的正交函数系, 对固定的 n , $\{J_n \left(\frac{\beta_m^{(n)}}{b} r\right), m = 1, 2, \dots\}$ 构成 $r \in [0, b]$ 上的带权 r 的正交函数系, 故由(3.296)可得展开式(3.295)中的系数为

$$A_{0,m} = \frac{1}{2\pi\sigma_{0,m}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b f(r, \theta) J_0 \left(\frac{\beta_m^{(0)}}{b} r\right) r dr, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.297)$$

$$\begin{cases} A_{n,m} = \frac{1}{\pi\sigma_{n,m}} \int_0^{2\pi} \cos n\theta d\theta \int_0^b f(r, \theta) J_n \left(\frac{\beta_m^{(n)}}{b} r\right) r dr \\ B_{n,m} = \frac{1}{\pi\sigma_{n,m}} \int_0^{2\pi} \sin n\theta d\theta \int_0^b f(r, \theta) J_n \left(\frac{\beta_m^{(n)}}{b} r\right) r dr \end{cases} \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (3.298)$$

其中, $\sigma_{n,m}$ 由(3.289)给出,

$$\sigma_{n,m} = \frac{1}{2} [bJ_{n+1}(\beta_m^{(n)})]^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots$$

习题3.6

1. 用级数方法求下列方程的通解。

$$(1) w''(z) - zw = 0$$

$$(2) zw''(z) + zw'(z) - zw(z) = 0$$

2. 利用Legendre多项式导数形式的定义证明:

$$P_n(1) = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

§3.7 常微分方程的特征值问题、分离变量法的理论基础

3.7.1 Sturm-Liouville问题

用分离变量法求解偏微分方程的定解问题时, 常常会碰到求解如下形式的常微分方程的特征值问题 (称为Sturm-Liouville问题)

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0, & (a < x < b) \end{cases} \quad (3.299)$$

$$\begin{cases} \left(-\alpha_1 \frac{dy}{dx} + \beta_1 y \right) \Big|_{x=a} = 0, & \left(\alpha_2 \frac{dy}{dx} + \beta_2 y \right) \Big|_{x=b} = 0 \end{cases} \quad (3.300)$$

其中 λ 为特征值, 对应的非零解为特征函数。(3.299)中的 $k(x)$ 、 $q(x)$ 和 $\rho(x)$ 为 x 在 (a, b) 中充分光滑的函数, 而且当 $x \in (a, b)$ 时, $k(x) > 0, \rho(x) > 0, q(x) \geq 0$ 。若 $x = a$ 为 $k(x)$ 的一阶零点, 则要求特征函数 $y(x)$ 在 $x = a$ 近旁有界; 若 $x = b$ 为 $k(x)$ 的一阶零点, 则要求 $y(x)$ 在 $x = b$ 近旁有界。这里的 $\rho(x)$ 成为权函数。(3.300)中规定常数 $\alpha_j \geq 0, \beta_j \geq 0, \alpha_j + \beta_j > 0$ ($j = 1, 2$)。

(3.300)中包含了很大一类边界条件的特征值问题。例如, 若 $\alpha_1 = 0$, 则在 $x = a$ 处为第一类边界条件; 若 $\beta_1 = 0$, 则在 $x = a$ 处为第二类边界条件; 若 $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$, 则在 $x = a$ 处为第三类边界条件。对于 $x = b$ 处的边界条件也有类似的讨论。

(3.299)包含了很大一类常微分方程的特征值问题。例如, 当 $k(x) = x, q(x) = \frac{\nu^2}{x}, \rho(x) = x$ ($0 < x < l$)时, (3.299)就化为 ν 阶Bessel方程

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) - \frac{\nu^2}{x} y + \lambda x y = 0$$

又如, 当 $k(x) = \frac{1}{1-x^2}, q(x) \equiv 0, \rho(x) \equiv 1$ ($-1 < x < 1$)时, (3.299)就化为Legendre方程

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0$$

再如, 当 $k(x) \equiv 1, q(x) \equiv 0, \rho(x) \equiv 1$ 时, (3.299)就化为我们多次碰到的常微分方程

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0$$

当然, 问题(3.300)没有把周期边界条件包括进去。对于周期边界条件问题, 也有类似的讨论, 本课程就不讨论了。

3.7.2 Sturm-Liouville问题解的性质

性质1 特征值 $\lambda \geq 0$ 。特别的, 当 $\beta_1 + \beta_2 > 0$ (即两端不同时为第二类边值问题) 时, 问题(3.299)、(3.300)的所有特征值 $\lambda > 0$ 。

〔证明〕 设 λ 为特征值，对应的特征函数为 $y(x)$ 。把(3.299)两边乘上 $y(x)$ 以后，再在 $[a, b]$ 上积分，得

$$\begin{aligned}\lambda \int_a^b \rho(x)[y(x)]^2 dx &= - \int_a^b y(x) \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{dy}{dx} \right] dx + \int_a^b q(x)[y(x)]^2 dx \\ &= k(a)y(a)y'(a) - k(b)y(b)y'(b) + \int_a^b \{k(x)[y'(x)]^2 + q(x)[y(x)]^2\} dx\end{aligned}\quad (3.301)$$

对(3.300)中左端边界条件 $\alpha_1 y'(a) = \beta_1 y(a)$ 两边同乘以 $y'(a)$ 得

$$\alpha_1 [y'(a)]^2 = \beta_1 y'(a)y(a) \quad (3.302)$$

对 $\alpha_1 y'(a) = \beta_1 y(a)$ 两边同乘以 $y(a)$ 得

$$\beta_1 [y(a)]^2 = \alpha_1 y'(a)y(a) \quad (3.303)$$

(3.302)与(3.303)相加以后可得

$$y'(a)y(a) = \frac{\alpha_1 [y'(a)]^2 + \beta_1 [y(a)]^2}{\alpha_1 + \beta_1} \quad (3.304)$$

同样，对(3.300)中右端边界条件 $-\alpha_2 y'(b) = \beta_2 y(b)$ 两边同乘以 $y(b)$ 得

$$-\alpha_2 y'(b)y(b) = \beta_2 [y(b)]^2 \quad (3.305)$$

对 $-\alpha_2 y'(b) = \beta_2 y(b)$ 两边同乘以 $y'(b)$ 得

$$-\beta_2 y'(b)y(b) = \alpha_2 [y'(b)]^2 \quad (3.306)$$

(3.305)与(3.306)相加以后可得

$$-y'(b)y(b) = \frac{\alpha_2 [y'(b)]^2 + \beta_2 [y(b)]^2}{\alpha_2 + \beta_2} \quad (3.307)$$

把(3.304)和(3.307)代入(3.301)可得

$$\lambda = \frac{\frac{k(a)\{\alpha_1 [y'(a)]^2 + \beta_1 [y(a)]^2\}}{\alpha_1 + \beta_1} + \frac{k(b)\{\alpha_2 [y'(b)]^2 + \beta_2 [y(b)]^2\}}{\alpha_2 + \beta_2} + \int_a^b \{k(x)[y'(x)]^2 + q(x)[y(x)]^2\} dx}{\int_a^b \rho(x)[y(x)]^2 dx} \geq 0 \quad (3.308)$$

再讨论一下在什么条件下，上式分子为零。首先的一个必要条件是 $y'(x) \equiv 0$ ，即 $y(x) \equiv A$ 为常数（因为 $y(x)$ 为非零解，故必须有 $A \neq 0$ ）。否则，若 $y'(x) \not\equiv 0$ ，则因为当 $x \in (a, b)$ 时， $k(x) > 0$ ，必有

$$\int_a^b k(x)[y'(x)]^2 dx > 0$$

其次, 必须 $q(x) \equiv 0$ 。否则, 因为 $q(x) \geq 0$, 若 $q(x) \not\equiv 0$, 必有在 (a, b) 的某小区间 $[a_1, b_1]$ 中, $q(x) > 0$, 因此必有

$$\int_a^b q(x)[y(x)]^2 dx = A^2 \int_a^b q(x) dx \geq A^2 \int_{a_1}^{b_1} q(x) dx > 0$$

最后, 因为 $y(x) \equiv A$, (3.308)分子中的 $y'(a) = 0, y'(b) = 0, y(a) = A, y(b) = A$ 。要使分子为零, 必须有 $\beta_1 = \beta_2 = 0$, 即(3.300)中, 两端都是第二类边界条件。因此, 只有当(3.299)中的 $q(x) \equiv 0$, 并且(3.300)中两端都是第二类边界条件时, 零特征值对应的特征函数为非零常数。■

性质2 有可列无穷多个非负特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ 满足

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$$

性质3 对应于不同特征值的特征函数在 $[a, b]$ 中是带权正交的。

【证明】 设 $\lambda \neq \mu$ 是两个不相等的特征值, 对应的特征函数分别是 $y(x)$ 和 $z(x)$, 则有

$$\lambda \rho(x)y(x) = -\frac{d}{dx}[k(x)y'(x)] + q(x)y(x) \quad (3.309)$$

$$\mu \rho(x)z(x) = -\frac{d}{dx}[k(x)z'(x)] + q(x)z(x) \quad (3.310)$$

(3.309)和(3.310)分别乘以 $z(x)$ 和 $y(x)$ 后, 两式相减可得

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu) \int_a^b \rho(x)y(x)z(x) dx &= \int_a^b \left\{ y(x) \frac{d}{dx}[k(x)z'(x)] - z(x) \frac{d}{dx}[k(x)y'(x)] \right\} dx \\ &= k(b)[y(b)z'(b) - y'(b)z(b)] - k(a)[y(a)z'(a) - y'(a)z(a)] \end{aligned} \quad (3.311)$$

另外, 由(3.300)在 $x = a$ 处的边界条件可得

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) - \beta_1 y(a) = 0 \\ \alpha_1 z'(a) - \beta_1 z(a) = 0 \end{cases} \quad (3.312)$$

(3.311)可以看成关于 (α_1, β_1) 的一个线性代数方程组。因为 α_1 和 β_1 不同时为零, 其系数行列式必须为零, 即

$$y(a)z'(a) - y'(a)z(a) = 0 \quad (3.313)$$

同样, 由(3.300)在 $x = b$ 处的边界条件可得

$$\begin{cases} \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0 \\ \alpha_2 z'(b) + \beta_2 z(b) = 0 \end{cases} \quad (3.314)$$

因为 α_2 和 β_2 不同时为零, 故必须有

$$y(b)z'(b) - y'(b)z(b) = 0 \quad (3.315)$$

把(3.313)和(3.315)代入(3.311)可得特征函数带权 $\rho(x)$ 的正交性,

$$\int_a^b \rho(x)y(x)z(x)dx = 0 \quad (3.316)$$

■

性质4 对于同一特征值, 对应的特征函数最多只有有限个。若某特征值对应的线性无关特征函数不止一个, 利用正交化方法, 可使这些特征函数互相带权 $\rho(x)$ 正交。由于对应不同特征值的特征函数是带权 $\rho(x)$ 正交的, 这样便得到了 $[a, b]$ 上完备的带权 $\rho(x)$ 的正交特征函数系 $\{y_n(x), n = 1, 2, \dots\}$, 使对 $[a, b]$ 上任一平方可积函数 $f(x)$, 都可以按此特征函数系进行Fourier展开,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) \quad (3.317)$$

其中

$$c_n = \frac{1}{\sigma_n} \int_a^b f(x)y_n(x)\rho(x)dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.318)$$

(3.318)中的 σ_n 为

$$\sigma_n = \int_a^b \rho(x)[y_n(x)]^2 dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.319)$$

(3.317)中的收敛是在 $L^2[a, b]$ 的范数意义之下:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k y_k(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (3.320)$$

当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中充分光滑且满足(3.300)中的边界条件时, (3.317)可以是一致收敛的。

第四章 积分变换法

§4.1 Fourier变换法

有界区域上的分离变量法的基本思想是把解按特征函数系进行Fourier展开。对于全空间上的问题（如Cauchy问题），则无法把解表示成Fourier级数的形式。此时可把解写成Fourier积分形式，或者等价地，先对解进行Fourier变换，然后在频谱空间中考虑问题。为此，先引进Fourier变换的定义。

4.1.1 Fourier变换的定义

1. 从Fourier级数到Fourier变换

对任何周期为 $2l$ 的函数 $f(x)$ ，在 $[-l, l]$ 上按正交函数系 $\{e^{i\frac{k\pi x}{l}}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 进行Fourier展开，

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_k e^{i\frac{k\pi x}{l}} \quad (4.1)$$

利用

$$\left(e^{i\frac{k\pi x}{l}}, e^{i\frac{m\pi x}{l}} \right) = \int_{-l}^l e^{i\frac{k\pi x}{l}} \cdot e^{-i\frac{m\pi x}{l}} dx = \begin{cases} 2l, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases} \quad (4.2)$$

可知(4.1)中的Fourier系数 \tilde{f}_k 为

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-i\frac{k\pi \xi}{l}} d\xi \quad (4.3)$$

把(4.3)代入(4.1)得

$$f(x) = \frac{1}{2l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{k\pi x}{l}} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-i\frac{k\pi \xi}{l}} d\xi \quad (4.4)$$

记

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}, \quad \Delta\lambda_k = \lambda_{k+1} - \lambda_k = \frac{\pi}{l} \quad (4.5)$$

则(4.4)可写成

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_k x} \Delta\lambda_k \int_{-l}^l f(\xi) e^{-i\lambda_k \xi} d\xi \quad (4.6)$$

当 $l \rightarrow \infty$ 时, λ_k 趋于连续量 λ ; $\Delta\lambda_k$ 趋于 $d\lambda$; $[-l, l]$ 上的积分趋于 $(-\infty, \infty)$ 上的积分。因此(4.6)变成

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \right] e^{i\lambda x} d\lambda \end{aligned} \quad (4.7)$$

2. Fourier变换和逆变换的定义

定义1 设 $f(x) \in L(-\infty, \infty)$ (即 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上 Lebesgue 可积), 故必有 $|f(x)| \in L(-\infty, \infty)$ 。定义 $f(x)$ 的 Fourier 变换为含参变量的 $\lambda \in (-\infty, \infty)$ 的积分

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi, \quad \lambda \in (-\infty, \infty) \quad (4.8)$$

记为

$$\tilde{f} = F[f] \quad (4.9)$$

定义2 对于任何 $g(\lambda) \in (-\infty, \infty)$, 定义 $g(\lambda)$ 的 Fourier 逆变换为

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (4.10)$$

记为

$$h = F^{-1}[g] \quad (4.11)$$

由(4.7)知, 对于 Fourier 变换和逆变换成立

$$F^{-1}[F[f(x)]] = f(x) \quad (4.12)$$

事实上可以证明, 对分段光滑函数 $f(x) \in L(-\infty, \infty)$, 成立

$$F^{-1}[F[f(x)]] = \begin{cases} f(x), & \text{当 } x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点} \\ \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)], & \text{当 } x \text{ 为 } f(x) \text{ 的不连续点} \end{cases}$$

3. Fourier变换和Fourier逆变换之间的关系

设 $f(x)$ 的 Fourier 变换为 $g(\lambda)$, 则 $f(\lambda)$ 的 Fourier 逆变换 $h(x)$ 为

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\xi(-x)} d\xi = g(-x) \end{aligned} \quad (4.13)$$

故若已知函数 f 的 Fourier 变换, 它的 Fourier 逆变换立即可得。因此, 下面我们只讨论 Fourier 变换及其性质, 不对 Fourier 逆变换作专门的讨论了。

4. Fourier变换和Fourier逆变换的其他定义

Fourier变换和逆变换还有其他不同的定义等方法, 例如:

$$\begin{aligned}
 F[f] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi, & F^{-1}[F[f]] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda; \\
 F[f] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi, & F^{-1}[F[f]] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda; \\
 F[f] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi, & F^{-1}[F[f]] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda; \\
 F[f] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi, & F^{-1}[F[f]] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda; \\
 F[f] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi, & F^{-1}[F[f]] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda;
 \end{aligned}$$

这些不同的定义之间并没有本质的差别。但我们认定了一种定义以后, 所有关于Fourier变换的性质和解题方法的研究都必须按照这一定义, 不能混淆。另外, 在查Fourier变换表的时候, 要注意表中的Fourier变换的定义。若表中的定义与我们的定义不相同, 则应该作适当的转换。

4.1.2 Fourier变换的性质

1. Fourier变换是线性变换

$$F[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 F[f_1] + c_2 F[f_2] \quad (4.14)$$

其中 c_1, c_2 为任意常数。这一性质很容易推广到有限多个线性组合的情形。

2. 平移性质

设 $\tilde{f}(\lambda) = F[f(x)]$, 则对于任意常数 α , 成立

$$F[f(x + \alpha)] = e^{i\alpha\lambda} \tilde{f}(\lambda) \quad (4.15)$$

【证明】 令 $\xi = x + \alpha$, 即 $x = \xi - \alpha$, 则有

$$\begin{aligned}
 F[f(x + \alpha)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \alpha) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda(\xi - \alpha)} d\xi \\
 &= e^{i\alpha\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \right) = e^{i\alpha\lambda} \tilde{f}(\lambda)
 \end{aligned}$$

■

由(4.15)可以得到一个重要推论

$$F^{-1} \left[e^{i\alpha\lambda} \tilde{f}(\lambda) \right] = f(x + \alpha) \quad (4.16)$$

3. 相似性质

设 $F[f(x)] = \tilde{f}(\lambda)$, 则对于任意常数 $\alpha \neq 0$, 成立

$$F[f(\alpha x)] = \frac{1}{|\alpha|} \tilde{f}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) \quad (4.17)$$

【证明】 只证 $\alpha < 0$ 的情形。 $\alpha > 0$ 时的证明是完全类似的, 请读者自行完成。

当 $\alpha < 0$ 时, 令 $\xi = \alpha x$, 即 $x = \frac{\xi}{\alpha}$, 则有

$$\begin{aligned} F[f(\alpha x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} f(\xi) e^{-i\lambda \frac{\xi}{\alpha}} d\xi \\ &= -\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\frac{\lambda}{\alpha}\xi} d\xi = \frac{1}{|\alpha|} \tilde{f}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

当 $\alpha > 0$ 时, 证明更简单些。 ■

4. 导数的Fourier变换

设 $f(x), f'(x) \in L(-\infty, \infty)$, 且 $f(\pm\infty) = 0$, 则

$$F[f'(x)] = i\lambda F[f(x)] = i\lambda \tilde{f}(\lambda) \quad (4.18)$$

导数的Fourier变换这一性质把关于原函数的求导运算转化为关于变换后函数的代数运算。把关于原函数的微分方程转化为关于变换后函数的代数方程, 从而达到简化微分方程的目的。

【证明】

$$F[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-i\lambda x} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\lambda) f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

■

注意到对于任意实数 λ 和 x , $e^{-i\lambda x}$ 为单位复数 (即 $|e^{-i\lambda x}| = 1$), 故上式右端第一项为零, 因此有

$$F[f'(x)] = i\lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = i\lambda F[f(x)]$$

由(4.13)可得推论: 若 $f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x) \in L(-\infty, \infty)$, 且 $f^{(k)}(\pm\infty) = 0$, ($k = 0, 1, \dots, n-1$), 则

$$F[f^{(n)}(x)] = (i\lambda)^n F[f(x)] \quad (4.19)$$

5. 变上限积分的Fourier变换

设 $f(x), g(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi \in L(-\infty, \infty)$, 且 $g(+\infty) = 0$, 则

$$F[g(x)] = \frac{1}{i\lambda} F[f(x)] = \frac{1}{i\lambda} \tilde{f}(\lambda) \quad (4.20)$$

【证明】 由于 $g'(x) = f(x)$, 且 $g(\pm\infty) = 0$, 故由(4.18)可得

$$\tilde{f}(\lambda) = F[g'(x)] = i\lambda F[g(x)]$$

有上式立即可得(4.20)。 ■

6. 与幂函数乘积的Fourier变换

设 $f(x), xf(x) \in L(-\infty, \infty)$ 。记 $\tilde{f}(\lambda) = F[f(x)]$, 则

$$F[xf(x)] = i\tilde{f}'(\lambda) \quad (4.21)$$

【证明】 对

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx$$

关于参数 λ 求导, 并注意到因为 $xf(x) \in L(-\infty, \infty)$, 被积函数关于参数 λ 求导后的积分

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)f(x)e^{-i\lambda x} dx = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\lambda x} dx$$

关于参数 $\lambda \in (-\infty, \infty)$ 仍为一致收敛, 故有

$$\tilde{f}'(\lambda) = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\lambda x} dx$$

由上式即得(4.21)式。 ■

推论 若 $f(x), x^n f(x) \in L(-\infty, \infty)$, 并记 $\tilde{f}(\lambda) = F[f(x)]$, 则

$$F[x^n f(x)] = i^n \tilde{f}^{(n)}(\lambda) \quad (4.22)$$

由(4.22)不难得到多项式 $p(x)$ 与 $f(x)$ 乘积的Fourier变换。

7. 卷积的Fourier变换

设周期为 2π 的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的Fourier级数分别为

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_k e^{ikx}, \quad g(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_m e^{imx}$$

则 $h(x) = f(x)g(x)$ 的Fourier级数为

$$h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_k e^{ikx} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_m e^{imx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_k \tilde{g}_m e^{i(k+m)x}$$

令 $n = k + m$, 则 $k = n - m$, 因此

$$h(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{n-m} \tilde{g}_m \right) e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_n e^{inx}$$

其中 $h(x)$ 的Fourier级数的系数为

$$\tilde{h}_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{n-m} \tilde{g}_m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

上式定义的序列 $\{\tilde{h}_n\}$ 被称为是序列 $\{\tilde{f}_n\}$ 与序列 $\{\tilde{g}_n\}$ 的卷积。

类似地, 对于 $f_1, f_2 \in L(-\infty, \infty)$, 定义 f_1 与 f_2 的卷积 $f_1 * f_2 = g$ 为

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x - \xi) f_2(\xi) d\xi \quad (4.23)$$

引进变量代换 $\eta = x - \xi$, 即 $\xi = x - \eta$, 代入(4.17)可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x - \xi) f_2(\xi) d\xi = - \int_{+\infty}^{-\infty} f_1(\eta) f_2(x - \eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\eta) f_2(x - \eta) d\eta$$

故卷积满足交换律,

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1 \quad (4.24)$$

对于两个函数卷积的Fourier变换, 有如下结果:

$$F[f_1 * f_2] = \sqrt{2\pi} F[f_1] \cdot F[f_2] = \sqrt{2\pi} \tilde{f}_1(\lambda) \tilde{f}_2(\lambda) \quad (4.25)$$

【证明】

$$\begin{aligned} F[f_1 * f_2] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi \right) e^{-i\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) e^{-i\lambda x} d\xi \end{aligned}$$

上式交换积分次序, 得

$$\begin{aligned} F[f_1 * f_2] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) e^{-i\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x - \xi) e^{-i\lambda x} dx \end{aligned}$$

对上式的内层积分引进变量代换 $\eta = x - \xi$, 即 $x = \eta + \xi$, 则有

$$\begin{aligned} F[f_1 * f_2] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta) e^{-i\lambda(\eta+\xi)} d\eta \right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) e^{-i\lambda\xi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta) e^{-i\lambda\eta} d\eta \right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) e^{-i\lambda\xi} \tilde{f}_2(\lambda) d\xi \\ &= \sqrt{2\pi} \tilde{f}_2(\lambda) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi = \sqrt{2\pi} \tilde{f}_1(\lambda) \tilde{f}_2(\lambda) \end{aligned}$$

■

由(4.25)可以得到一个重要推论:

$$F^{-1}[\tilde{f}_1(\lambda) \cdot \tilde{f}_2(\lambda)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_1 * f_2 \quad (4.26)$$

4.1.3 多元函数的Fourier变换

1. 多元函数Fourier变换的定义

n 元函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ 的Fourier变换定义为

$$F[f] = \tilde{f}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) e^{-i(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)} dx_1 \cdots dx_n \quad (4.27)$$

记 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 则Fourier变换的定义为

$$F[f(\mathbf{x})] = \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (4.28)$$

同样, 对于 n 元函数 $g(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 其Fourier逆变换的定义是

$$F^{-1}[g] = \tilde{h}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) e^{i(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)} d\lambda_1 \cdots d\lambda_n \quad (4.29)$$

类似地, 上式也可以写成

$$F^{-1}[g(\boldsymbol{\lambda})] = \tilde{h}(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{\lambda}) e^{i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\lambda}} d\boldsymbol{\lambda} \quad (4.30)$$

2. 多元函数Fourier变换的性质

一元函数Fourier变换的许多性质对多元函数的Fourier也成立。例如:

(1)

$$F^{-1}[F[f]] = f \quad (4.31)$$

(2) 若 $f(x_1, \dots, x_n)$ 的Fourier变换为 $g(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 则 $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 的Fourier逆变换 $h(x_1, \dots, x_n)$ 为

$$h(x_1, \dots, x_n) = g(-x_1, \dots, -x_n) \quad (4.32)$$

(3) Fourier变换是线性变换, 即对于任意函数 f_1 和 f_2 以及任意常数 c_1 、 c_2 , 成立

$$F[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 F[f_1] + c_2 F[f_2] \quad (4.33)$$

(4) 导数的Fourier变换性质仍然保留,

$$F\left[\frac{\partial f}{\partial x_k}\right] = i\lambda_k F[f] = i\lambda_k \tilde{f}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (4.34)$$

$$F\left[\frac{\partial^{m_1+m_2} f}{\partial x_j^{m_1} \partial x_k^{m_2}}\right] = (i\lambda_j)^{m_1} (i\lambda_k)^{m_2} \tilde{f}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (4.35)$$

(5) 若定义 f_1 和 f_2 的卷积 $g(x_1, \dots, x_n)$ 为

$$g = f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n) f_2(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \cdots d\xi_n \quad (4.36)$$

则卷积的Fourier变换满足

$$F[f_1 * f_2] = (\sqrt{2\pi})^n F[f_1] \cdot F[f_2] = (\sqrt{2\pi})^n \tilde{f}_1(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \tilde{f}_2(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (4.37)$$

由上式可得一个重要推论

$$F^{-1}[\tilde{f}_1 \cdot \tilde{f}_2] = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n f_1 * f_2 \quad (4.38)$$

4.1.4 函数Fourier变换的例子

例1 $f(x) = e^{-x^2}$

【解】

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\lambda) &= F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-i\lambda x} dx \\ \tilde{f}'(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot (-i\lambda) e^{-i\lambda x} dx = \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} de^{-x^2} \\ &= \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} \cdot e^{-i\lambda x} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-i\lambda x} dx = -\frac{\lambda}{2} \tilde{f}(\lambda) \end{aligned}$$

解常微分方程

$$\tilde{f}'(\lambda) = -\frac{\lambda}{2} \tilde{f}(\lambda)$$

得

$$\tilde{f}(\lambda) = ce^{-\frac{1}{4}\lambda^2}$$

上式令 $\lambda = 0$ 得

$$c = \tilde{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

\therefore

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{4}\lambda^2}$$

由相似性(4.17)可知, \forall 常数 $\alpha > 0$, 成立

$$F[e^{-\alpha x^2}] = F[e^{-(\sqrt{\alpha}x)^2}] = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}} \quad (4.39)$$

利用Fourier变换与Fourier逆变换的关系(4.13)可得 $e^{-\alpha\lambda^2}$ 的Fourier逆变换为

$$F^{-1}[e^{-\alpha\lambda^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} \quad (4.40)$$

■

例2 $f(x) = e^{-|x|}$

【解】

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\lambda) = F[f] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-i\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \cos(\lambda x) dx - i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \sin(\lambda x) dx\end{aligned}$$

上式最后一个等号的右端, 其第二项为奇函数在原点对称区间上的积分, 故积分值为零; 第一项为偶函数的积分, 故有

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\lambda) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos(\lambda x) dx = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \cos(\lambda x) de^{-x} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x} \cos(\lambda x) \Big|_{x=0}^{x=\infty} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} (-\lambda) \sin(\lambda x) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} - \lambda \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(\lambda x) dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} + \lambda \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \sin \lambda x de^{-x} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} + \lambda \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x} \sin \lambda x \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \lambda^2 \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos(\lambda x) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} - \lambda^2 \tilde{f}(\lambda)\end{aligned}$$

由上式可以解得

$$\tilde{f}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1 + \lambda^2}$$

由相似性质(4.17)可知, \forall 常数 $\alpha > 0$, 成立

$$F[e^{-\alpha|x|}] = F[e^{-|\alpha x|}] = \frac{1}{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{\lambda}{\alpha})^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\alpha}{\lambda^2 + \alpha^2} \quad (4.41)$$

由Fourier变换和逆变换之间的关系(4.13)可得 $e^{-\alpha|\lambda|}$ 的Fourier逆变换为

$$F^{-1}[e^{-\alpha|\lambda|}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} \quad (4.42)$$

■

注1 函数的Fourier变换一般可查表得到, 但是要注意表中Fourier变换的定义!

4.1.5 用Fourier变换法求解偏微分方程的定解问题

1. 一维热传导方程的Cauchy问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & (t > 0, -\infty < x < \infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & (-\infty < x < \infty) \end{cases} \quad (4.43)$$

用Fourier变换法求解上面的问题可以分为以下三步。

第一步 对方程和定解条件关于变化范围为全空间的某自变量进行Fourier变换。

把 t 看成参数, 对方程和初始条件关于自变量 x 进行Fourier变换, 并记 $F[u(x, t)] = \tilde{u}(\lambda, t)$, $F[f(x, t)] = \tilde{f}(\lambda, t)$, $F[\varphi(x)] = \tilde{\varphi}(\lambda)$ 。注意到

$$F[u_t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{-i\lambda x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\lambda x} dx \right) = \tilde{u}_t(\lambda, t)$$

$$F[a^2 u_{xx} + f(x, t)] = a^2 F[u_{xx}] + F[f(x, t)] = a^2 (i\lambda)^2 \tilde{u}(\lambda, t) + \tilde{f}(\lambda, t)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}|_{t=0} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) e^{-i\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\lambda x} dx = F[\varphi(x)] = \tilde{\varphi}(\lambda) \end{aligned}$$

可得变换后的定解问题

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = -a^2 \lambda^2 \tilde{u}(\lambda, t) + \tilde{f}(\lambda, t), & (t > 0, -\infty < \lambda < \infty) \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(\lambda), & (-\infty < \lambda < \infty) \end{cases} \quad (4.44)$$

第二步 在频谱空间中求解变换后的定解问题。

把 λ 看成参数, 则(4.44)是关于 t 的一个常微分方程的初值问题。解此初值问题得

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{\varphi}(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t} + \int_0^t \tilde{f}(\lambda, \tau) e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} d\tau \quad (4.45)$$

第三步 对频谱空间中定解问题的解进行Fourier逆变换, 得到原定解问题的解。

利用 $F^{-1} \left[e^{-\alpha \lambda^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$ (课堂上讲过的例子) 可得

$$\begin{aligned} g(x, t) &= F^{-1} \left[e^{-a^2 \lambda^2 t} \right] = \frac{1}{\sqrt{2a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \\ F^{-1} \left[e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2a^2 (t-\tau)}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 (t-\tau)}} = g(x, t-\tau) \end{aligned}$$

把 t 看成参数, 对(4.45)两边关于自变量 λ 进行Fourier逆变换得

$$u(x, t) = F^{-1}[\tilde{u}(\lambda, t)] = F^{-1}[\tilde{\varphi}(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t}] + F^{-1} \left[\int_0^t \tilde{f}(\lambda, \tau) e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} d\tau \right]$$

注意上式右端第二项中, $[0, t]$ 上的积分变量是 τ , 而Fourier变换是关于自变量 λ 在 $(-\infty, \infty)$ 上的积分。假设这两个积分可以交换次序, 可得

$$F^{-1} \left[\int_0^t \tilde{f}(\lambda, \tau) e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} d\tau \right] = \int_0^t F^{-1} \left[\tilde{f}(\lambda, \tau) e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} \right] d\tau$$

因此

$$u(x, t) = F^{-1}[\tilde{\varphi}(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t}] + \int_0^t F^{-1} \left[\tilde{f}(\lambda, \tau) e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} \right] d\tau$$

利用卷积的Fourier变换性质(4.38)可得原问题的解为

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F^{-1}[\tilde{\varphi}(\lambda)] * F^{-1}[e^{-a^2\lambda^2 t}] + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F^{-1}[\tilde{f}(\lambda, \tau)] * F^{-1}[e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}] d\tau \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi(x) g(x, t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t f(x, \tau) g(x, t - \tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi + \int_0^t \frac{d\tau}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \tau) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

注2 在求解过程中, 我们假设积分和求导可以交换次序, 两积分可以交换次序, $F[u_{xx}] = (i\lambda)^2 = F[u]$ 等。由于解尚未求出, 事先只好作这些假设, 否则寸步难行, 故求出的只是形式解。是否是其解, 尚需验证。对于本问题, 不难证明, 当 $f(x, t)$ 和 $\varphi(x)$ 是有界连续函数时, (4.46)给出的确实是问题的解。

注3 由求解公式(4.46)可知, 若 $f(x, t)$ 和 $\varphi(x)$ 是关于 x 的奇(偶、周期为 l)的函数, 则解 $u(x, t)$ 也是关于 x 的奇(偶、周期为 l)的函数。因此利用奇延拓或者偶延拓的办法以及公式(4.46), 可以分别求出解是第一类和第二类齐次边界条件下, 热传导方程的半无界问题(见习题4.1)。

2. 高维热传导方程的Cauchy问题

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z), & (t > 0, -\infty < x, y, z < \infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), & (-\infty < x, y, z < \infty) \end{cases} \tag{4.47}$$

把 t 看成参数, 对方程两边及初始条件关于 x, y, z 进行Fourier变换, 并记 $F[u(x, y, z, t)] = \tilde{u}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, t)$, $F[f(x, y, z, t)] = \tilde{f}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, t)$, $F[\varphi(x, y, z)] = \tilde{\varphi}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, 并注意到

$$F[u_{xx}] = (i\lambda_1)^2 F[u] = -\lambda_1^2 \tilde{u}, \quad F[u_{yy}] = -\lambda_2^2 \tilde{u}, \quad F[u_{zz}] = -\lambda_3^2 \tilde{u}$$

可得

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = -a^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\tilde{u} + \tilde{f}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, t), & (t > 0, -\infty < \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < \infty) \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), & (-\infty < \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < \infty) \end{cases} \tag{4.48}$$

把 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 看成参数, 求解上面关于自变量 t 的常微分方程的定解问题, 得

$$\tilde{u}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, t) = \tilde{\varphi}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) e^{-a^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)t} + \int_0^t \tilde{f}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \tau) e^{-a^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(t-\tau)} d\tau \tag{4.49}$$

把 t 看成参数, 对上式两边关于 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 进行Fourier逆变换, 并注意到

$$\begin{aligned} F^{-1} \left[e^{-a^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)t} \right] &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)t} e^{i(\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z)t} d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda_1^2 t} e^{i\lambda_1 x} d\lambda_1 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda_2^2 t} e^{i\lambda_2 y} d\lambda_2 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda_3^2 t} e^{i\lambda_3 z} d\lambda_3 \right) \\ &= \left(\frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \right) \left(\frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-\frac{y^2}{4a^2 t}} \right) \left(\frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-\frac{z^2}{4a^2 t}} \right) = \left(\frac{1}{a\sqrt{2t}} \right)^3 e^{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4a^2 t}} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} g(x, y, z, t) \end{aligned}$$

$$F^{-1} \left[e^{-a^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(t-\tau)} \right] = g(x, y, z, t - \tau) = \left(\frac{1}{a\sqrt{2(t-\tau)}} \right)^3 e^{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

可得原问题的解为

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= F^{-1} \left[\tilde{\varphi}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) e^{-a^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)t} \right] \\ &\quad + \int_0^t F^{-1} \left[\tilde{f}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \tau) e^{-a^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(t-\tau)} \right] d\tau \\ &= \left(\frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \right)^3 F^{-1} [\tilde{\varphi}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)] * F^{-1} \left[e^{-a^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)t} \right] \\ &\quad + \int_0^t \left(\frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \right)^3 F^{-1} [\tilde{f}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \tau)] * F^{-1} \left[e^{-a^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(t-\tau)} \right] d\tau \\ &= \left(\frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \right)^3 \varphi(x, y, z) * g(x, y, z, t) \\ &\quad + \left(\frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \right)^3 \int_0^t f(x, y, z, \tau) * g(x, y, z, t - \tau) d\tau \\ &= \left(\frac{1}{a\sqrt{2a\sqrt{\pi t}}} \right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \eta, \zeta) e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2 t}} d\xi d\eta d\zeta \\ &\quad + \int_0^t \left(\frac{1}{a\sqrt{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}} \right)^3 d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta, \zeta) e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi d\eta d\zeta \quad (4.50) \end{aligned}$$

(4.50)称为三维热传导方程Cauchy问题解的Poisson公式。用类似的方法可以导出二维热传导方程Cauchy问题解的Poisson公式。由此可见, 与波动方程Cauchy问题的求解不同, 高维热传导方程Cauchy问题都可用Fourier变换方法求解, 而且它们的求解过程不比一维问题困难。

3. 一维波动方程的Cauchy问题

在第二章中, 利用齐次化原理和齐次方程Cauchy问题的d'Alembert公式, 我们导出了一维波动方程Cauchy问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & (t > 0, -\infty < x < \infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & (-\infty < x < \infty) \end{cases} \quad (4.51)$$

的求解公式(2.43)。现在，我们用Fourier变换求解此问题。为此，我们把 t 看成参数，对上式中的方程和初始条件关于 x 进行Fourier变换，并记 $F[u(x, t)] = \tilde{u}(\lambda, t)$ ， $F[f(x, t)] = \tilde{f}(\lambda, t)$ ， $F[\varphi(x)] = \tilde{\varphi}(\lambda)$ ，可得

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = -a^2 \lambda^2 \tilde{u}(\lambda, t) + \tilde{f}(\lambda, t), & (t > 0, -\infty < \lambda < \infty) \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(\lambda), \quad \tilde{u}_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(\lambda), & (-\infty < \lambda < \infty) \end{cases} \quad (4.52)$$

把 λ 看成参数，解上面关于自变量 t 的常微分方程的定解问题，得

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{\varphi}(\lambda) \cos(a\lambda t) + \frac{1}{a\lambda} \tilde{\psi}(\lambda) \sin(a\lambda t) + \int_0^t \frac{1}{a\lambda} \tilde{f}(\lambda, \tau) \sin[a\lambda(t - \tau)] d\tau \quad (4.53)$$

把 t 看成参数，对上式两边关于自变量 λ 进行Fourier逆变换，得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F^{-1} [\tilde{\varphi}(\lambda) \cos(a\lambda t)] + F^{-1} \left[\frac{1}{a\lambda} \tilde{\psi}(\lambda) \sin(a\lambda t) \right] \\ &\quad + \int_0^t F^{-1} \left[\frac{1}{a\lambda} \tilde{f}(\lambda, \tau) \sin[a\lambda(t - \tau)] \right] d\tau \end{aligned} \quad (4.54)$$

注意到

$$F^{-1} [\tilde{\varphi}(\lambda) \cos(a\lambda t)] = F^{-1} \left[\tilde{\varphi}(\lambda) \frac{e^{ia\lambda t} + e^{-ia\lambda t}}{2} \right] = \frac{1}{2} \{ F^{-1} [\tilde{\varphi}(\lambda) e^{ia\lambda t}] + F^{-1} [\tilde{\varphi}(\lambda) e^{-ia\lambda t}] \}$$

利用平移性质的推论(4.16)得

$$F^{-1} [\tilde{\varphi}(\lambda) \cos(a\lambda t)] = \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] \quad (4.55)$$

另外，记

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(\xi) d\xi, \quad G(x, \tau) = \int_{-\infty}^x f(\xi, \tau) d\xi$$

则由变上限积分的Fourier变换性质(4.20)得

$$\tilde{\Psi}(\lambda) = F^{-1} [\Psi(x)] = \frac{1}{i\lambda} \tilde{\psi}(\lambda), \quad \tilde{G}(\lambda, \tau) = F^{-1} [G(x, \tau)] = \frac{1}{i\lambda} \tilde{f}(\lambda, \tau)$$

因此

$$\begin{aligned} F^{-1} \left[\frac{1}{a\lambda} \tilde{\psi}(\lambda) \sin(a\lambda t) \right] &= \frac{1}{a} F^{-1} \left[\frac{1}{\lambda} \tilde{\psi}(\lambda) \cdot \frac{e^{ia\lambda t} - e^{-ia\lambda t}}{2i} \right] \\ &= \frac{1}{2a} F^{-1} \left[\frac{1}{i\lambda} \tilde{\psi}(\lambda) (e^{ia\lambda t} - e^{-ia\lambda t}) \right] \\ &= \frac{1}{2a} \left\{ F^{-1} [\tilde{\Psi}(\lambda) e^{ia\lambda t}] - F^{-1} [\tilde{\Psi}(\lambda) e^{-ia\lambda t}] \right\} \\ &= \frac{1}{2a} [\Psi(x + at) - \Psi(x - at)] \\ &= \frac{1}{2a} \left[\int_{-\infty}^{x+at} \psi(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{x-at} \psi(\xi) d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (4.56)$$

类似地有

$$\begin{aligned} F^{-1} \left[\frac{1}{a\lambda} \tilde{f}(\lambda, \tau) \sin(a\lambda(t - \tau)) \right] &= \frac{1}{2a} [G(x + a(t - \tau)) - G(x - a(t - \tau))] \\ &= \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \end{aligned} \quad (4.57)$$

把(4.55)~(4.57)代入(4.54)可得与(2.43)一样的求解公式

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

4. 上半平面中Laplace方程的Dirichlet问题

现利用Fourier变换法求解上半平面中Laplace方程的Dirichlet问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (y > 0, -\infty < x < \infty) \\ u|_{y=0} = \varphi(x), & u|_{y=+\infty} \text{有界} \end{cases} \quad (4.58)$$

为此, 把 y 看成参数, 对上式方程两端和边界条件关于自变量 x 进行Fourier变换, 并记 $F[u(x, y)] = \tilde{u}(\lambda, y)$, $F[\varphi(x)] = \tilde{\varphi}(\lambda)$, 可得

$$\begin{cases} \tilde{u}_{yy} - \lambda^2 \tilde{u}(\lambda, y) = 0, & (y > 0, -\infty < \lambda < \infty) \\ \tilde{u}|_{y=0} = \tilde{\varphi}(\lambda), & \tilde{u}|_{y=+\infty} \text{有界} \end{cases} \quad (4.59)$$

把 λ 看成参数, (4.59)是关于自变量 y 的一个常微分方程的定解问题。当 $\lambda \neq 0$ 时, 常微分方程的通解是

$$\tilde{u}(\lambda, y) = c_1(\lambda)e^{\lambda y} + c_2(\lambda)e^{-\lambda y} \quad (4.60)$$

其中, $c_1(\lambda)$ 、 $c_2(\lambda)$ 是与 λ 有关的待定常数。当 $\lambda > 0$ 时, 由 $\tilde{u}|_{y=+\infty}$ 有界可得: $c_1(\lambda) = 0$, 故此时有

$$\tilde{u}(\lambda, y) = c_2(\lambda)e^{-\lambda y} = c_2(\lambda)e^{-|\lambda|y} \quad (4.61)$$

当 $\lambda < 0$ 时, 由 $\tilde{u}|_{y=+\infty}$ 有界可得: $c_2(\lambda) = 0$, 故此时有

$$\tilde{u}(\lambda, y) = c_1(\lambda)e^{\lambda y} = c_1(\lambda)e^{-|\lambda|y} \quad (4.62)$$

当 $\lambda = 0$ 时, 常微分方程的通解是

$$\tilde{u}(\lambda, y) = c_1(\lambda) + c_2(\lambda)y \quad (4.63)$$

由 $\tilde{u}|_{y=+\infty}$ 有界可得: $c_2(\lambda) = 0$, 故此时有

$$\tilde{u}(\lambda, y) = c_1(\lambda) \quad (4.64)$$

不管哪一种情形, 常微分方程满足 $y = +\infty$ 处边界条件的解可以写成统一的式子,

$$\tilde{u}(\lambda, y) = c(\lambda)e^{-|\lambda|y} \quad (4.65)$$

由 $\tilde{u}|_{y=0} = \tilde{\varphi}(\lambda)$ 得 $c(\lambda) = \tilde{\varphi}(\lambda)$, 故问题(4.59)的解为

$$\tilde{u}(\lambda, y) = \tilde{\varphi}(\lambda)e^{-|\lambda|y} \quad (4.66)$$

把 y 看成参数, 上式两边关于自变量 λ 进行 Fourier 逆变换, 并注意到

$$F^{-1}[e^{-|\lambda|y}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (4.67)$$

可得

$$u(x, y) = F^{-1}[\tilde{\varphi}(\lambda)e^{-|\lambda|y}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi(x) * \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \quad (4.68)$$

习题4.1

1. 利用延拓的方法以及一维热传导方程 Cauchy 问题的求解公式(4.46), 求解以下半无界问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & (x > 0, t > 0) \\ u|_{x=0} = 0, & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & (x \geq 0) \end{cases}$$

2. 用 Fourier 变换法求解一维热传导方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + bu_x + cu + f(x, t), & (t > 0, -\infty < x < \infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

上式中的 a, b, c 均为常数, 而且 $a > 0$ 。

§4.2 Laplace 变换法

4.2.1 Laplace 变换和逆变换的定义

Fourier 变换最大的限制是对于三角函数 $\sin x, \cos x$, 以及 $1, x$ 和 x 的多项式等函数的 Fourier 变换都不存在。另外, 进行 Fourier 变换的函数的自变量的变换范围必须是全空间 $(-\infty, \infty)$, 而有许多变量, 如时间 t 的变化范围是半无限空间 $[0, +\infty)$, 故对这种自变量的函数, 也不能进行 Fourier 变换。对 Fourier 变换的第二种限制可以通过把 $f(t)$ 的定义延拓到 $(-\infty, 0)$ 而加以消去: 当 $t < 0$ 时定义 $f(t) = 0$ 。对于增长速度不超过某指数速度的 $f(t)$,

$$|f(t)| \leq Me^{\sigma t}, \quad (t \geq 0) \quad (4.69)$$

我们可以通过引进一个新的函数 $f_1(t)$ 来消除 Fourier 变换的第一种限制: 取定常数 $\sigma > \sigma_0$, 定义

$$f_1(t) = f(t)e^{-\sigma t}, \quad (-\infty < t < \infty)$$

则 $f_1(t) \in L(-\infty, \infty)$, 因此可以对 $f_1(t)$ 进行 Fourier 变换,

$$F[f_1(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-(\sigma+i\lambda)\tau} d\tau$$

记 $p = \sigma + i\lambda$, 即 $\lambda = \frac{1}{i}(p - \sigma)$, $d\lambda = \frac{1}{i} dp$, 则

$$\begin{aligned} F^{-1}[F[f_1]] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-(\sigma+i\lambda)\tau} d\tau \right] e^{i\lambda t} d\lambda \\ &= \frac{e^{-\sigma t}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \right] e^{pt} dp \\ &= f_1(t) = \begin{cases} f(t)e^{-\sigma t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

上式两边同乘以 $e^{\sigma t}$ 得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[\int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \right] e^{pt} dp = \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (4.70)$$

定义1 对于定义在 $[0, +\infty)$ 上并满足条件(4.69)的函数 $f(t)$, 其 Laplace 变换定义为

$$\hat{f}(p) = L[f] = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad \Re(p) > \sigma_0 \quad (4.71)$$

可以证明, $\hat{f}(p)$ 是右半平面 $\Re(p) > \sigma_0$ 中的复变解析函数。

定义2 设右半平面 $\Re(p) > \sigma_0$ 中的复变解析函数 $g(p)$ 满足 $\lim_{p \rightarrow \infty} g(p) = 0$, 则 $g(p)$ 的 Laplace 逆变换定义是

$$h(t) = L^{-1}[g] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} g(p) e^{pt} dp, \quad (\sigma > \sigma_0) \quad (4.72)$$

由复变函数的 Riemann 引理知, 上面定义的函数 $h(t)$ 与 σ 的选择无关。其次, 由(4.70)知道下面式子成立,

$$L^{-1}[L[f]] = \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (4.73)$$

4.2.2 Laplace 变换的性质

以下记 $\hat{f}(p) = L[f(t)]$ 。

1. Laplace 变换是线性变换

$$L[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 L[f_1] + c_2 L[f_2] \quad (4.74)$$

其中 c_1, c_2 为任意常数, 这一性质很容易推广到有限多个函数线性组合的情形。

2. 延迟性质

设 $t_0 > 0$ 。定义

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t - t_0), & t \geq t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$$

则

$$L[f_1(t)] = e^{-pt_0} L[f(t)] = e^{-pt_0} \hat{f}(p) \quad (4.75)$$

【证明】

$$L[f_1(t)] = \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-pt} dt = \int_{t_0}^{\infty} f(t - t_0) e^{-pt} dt$$

令 $\tau = t - t_0$ ，即 $t = \tau + t_0$ ，则

$$L[f_1(t)] = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} \cdot e^{-pt_0} d\tau = e^{-pt_0} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau = e^{-pt_0} \hat{f}(p)$$

■

由(4.75)得一重要推论：

$$L^{-1} [e^{-pt_0} \hat{f}(p)] = f_1(t) = \begin{cases} f(t - t_0), & t \geq t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases} \quad (4.76)$$

3. 位移性质

对任意复数 p_0 ，成立

$$L [e^{p_0 t} f(t)] = \hat{f}(p - p_0) \quad (4.77)$$

【证明】

$$L [e^{p_0 t} f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} e^{p_0 t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-p_0)t} dt = \hat{f}(p - p_0)$$

■

4. 相似性质

对任意常数 $\alpha > 0$ 成立

$$L[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} \hat{f}\left(\frac{p}{\alpha}\right) \quad (4.78)$$

【证明】 令 $\tau = \alpha t$ ，即 $t = \frac{\tau}{\alpha}$ ，则

$$L[f(\alpha t)] = \int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} \hat{f}\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

■

5. 导数的Laplace变换

$$L[f'(t)] = p\hat{f}(p) - f(0) \quad (4.79)$$

【证明】

$$\begin{aligned} L[f'(t)] &= \int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt} dt = f(t)e^{-pt} \Big|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^{\infty} f(t)(-p)e^{-pt} dt \\ &= -f(0) + p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = p\hat{f}(p) - f(0) \end{aligned}$$

■

类似地,

$$L[f''(t)] = pL[f'(t)] - f'(0) = p^2\hat{f}(p) - pf(0) - f'(0) \quad (4.80)$$

一般情况下, 成立

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n\hat{f}(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - pf^{(n-1)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (4.81)$$

即 $f^{(n)}(t)$ 的Laplace变换除了 $p^n\hat{f}$ 项外, 还有一个 p 的 $n-1$ 次多项式。此多项式的系数是原来函数 $f(t)$ 及其阶数不超过 $n-1$ 的各阶导数在 $t=0$ 点的值, 这一点是与导数的Fourier变换不同的。

6. 变上限积分的Laplace变换

定义

$$F(t) = \begin{cases} \int_0^t f(\tau) d\tau, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

则

$$L[F(t)] = \hat{F}(p) = \frac{1}{p}\hat{f}(p) \quad (4.82)$$

【证明】 由于 $F'(t) = f(t)$, $F(0) = 0$, 故

$$\hat{f}(p) = L[f(t)] = L[F'(t)] = p\hat{F}(p) - F(0) = p\hat{F}(p)$$

由上式即得(4.82)。 ■

由(4.82)得一重要推论:

$$F^{-1}\left[\frac{1}{p}\hat{f}(p)\right] = \begin{cases} \int_0^t f(\tau) d\tau, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad (4.83)$$

7. 与幂函数乘积的Laplace变换

$$L[tf(t)] = -\hat{f}'(p) \quad (4.84)$$

【证明】 对(4.71)两边关于 p 求导, 得

$$\hat{f}'(p) = \int_0^{\infty} f(t)(-t)e^{-pt} dt = -\int_0^{\infty} tf(t)e^{-pt} dt = -L[tf(t)]$$

由上式即得(4.84)式。 ■

类似地, 我们有

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n \hat{f}^{(n)}(p) \quad (4.85)$$

由(4.85)我们不难求出任一多项式 $Q(t)$ 与 $f(t)$ 乘积的Laplace变换 $L[Q(t)f(t)]$; 再由位移性质不难求出 $L[e^{p_0 t} Q(t)f(t)]$ 。

8. 卷积的Laplace变换

$$L[f_1 * f_2] = L[f_1] \cdot L[f_2] = \hat{f}_1(p) \cdot \hat{f}_2(p) \quad (4.86)$$

【证明】 首先, 对 $t < 0$ 时取零值的 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$, 它们的卷积为

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (4.87)$$

所以

$$L[f_1 * f_2] = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} f_1(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-pt} dt$$

对上式最右端的内层积分, 令 $t' = t - \tau$, 即 $t = t' + \tau$, 则

$$\int_{\tau}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f_2(t') e^{-p(t'+\tau)} dt' = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f_2(t') e^{-pt'} dt' = e^{-p\tau} \hat{f}_2(p)$$

因此

$$L[f_1 * f_2] = \int_0^{\infty} f_1(\tau) e^{-p\tau} \hat{f}_2(p) d\tau = \hat{f}_2(p) \int_0^{\infty} f_1(\tau) e^{-p\tau} d\tau = \hat{f}_2(p) \hat{f}_1(p)$$

■

由(4.86)可得一重要推论:

$$L^{-1}[\hat{f}_1(p) \hat{f}_2(p)] = f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (4.88)$$

4.2.3 函数Laplace变换的例子

例1 定义Heaviside函数

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

则

$$L[H(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{p} \quad (\Re(p) > 0) \quad (4.89)$$

如果我们把常值函数1只定义在 $t \in [0, +\infty)$, 当 $t \in (-\infty, 0)$ 时令其值为零。即把1看成 $H(t)$, 则(4.89)可写成 $L[1] = \frac{1}{p}$ 。类似地有

$$L[t^n] = L[t^n H(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \left(\frac{1}{p} \right) = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (\Re(p) > 0) \quad (4.90)$$

由此不难求出任一多项式 $Q(t)$ 的Laplace变换。

例2 对任一复数 p_0 , 由(4.89)、(4.90)和Laplace变换的位移性质(4.77)得

$$L[e^{p_0 t}] = L[e^{p_0 t} H(t)] = \frac{1}{p - p_0} \quad (4.91)$$

$$L[t^n e^{p_0 t}] = \frac{n!}{(p - p_0)^{n+1}} \quad (4.92)$$

由此不难求出任一多项式 $Q(t)$ 与 $e^{p_0 t}$ 乘积的Laplace变换 $L[Q(t)e^{p_0 t}]$ 。

例3 对任一复数 α 、 β 成立

$$\begin{aligned} L[\cos \beta t] &= L\left[\frac{1}{2}(e^{i\beta t} + e^{-i\beta t})\right] = \frac{1}{2} \{L[e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}]\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{p - i\beta} + \frac{1}{p + i\beta} \right\} = \frac{p}{p^2 + \beta^2} \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} L[\sin \beta t] &= L\left[\frac{1}{2i}(e^{i\beta t} - e^{-i\beta t})\right] = \frac{1}{2i} \{L[e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}]\} \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{p - i\beta} - \frac{1}{p + i\beta} \right\} = \frac{\beta}{p^2 + \beta^2} \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$L[e^{\alpha t} \cos \beta t] = \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}, \quad L[e^{\alpha t} \sin \beta t] = \frac{\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2} \quad (4.95)$$

注1 一般情况下, 可通过查表求得一个函数的Laplace变换。

4.2.4 Laplace逆变换的求法

已知一个复变解析函数 $g(p)$, 求其Laplace逆变换的方法大致有以下两种。

第一种。已知 $L[f(t)] = g(p)$, 则 $L^{-1}[g(p)] = f(t)$ 。例如, 利用性质可以把一些复杂的复变函数的Laplace逆变换化为求一些比较简单的复变函数的Laplace逆变换。而通过直接计算或者查表可以得知这些简单复变函数是一些已知函数的Laplace变换。

第二种。选取适当的积分围道, 利用留数定理, 直接从 $g(p)$ 的Laplace逆变换定义(4.72)出发, 计算 $L^{-1}[g(p)]$ 。

例4 当复数 $\alpha \neq \beta$ 时,

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)} \right] &= L^{-1} \left[\frac{1}{\alpha-\beta} \left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p-\beta} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta} \left\{ L^{-1} \left[\frac{1}{p-\alpha} \right] - L^{-1} \left[\frac{1}{p-\beta} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta} (e^{\alpha t} - e^{\beta t}) \end{aligned}$$

例5

$$L^{-1} \left[\frac{5}{(p+2)^2 + 9} \right] = L^{-1} \left[\frac{5}{3} \left(\frac{3}{(p+2)^2 + 3^2} \right) \right] = \frac{5}{3} e^{-2t} \sin 3t$$

例6

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{p^2}{(p^2+1)^2} \right] &= L^{-1} \left[\frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1} \right] = L^{-1} \left[\frac{p}{p^2+1} \right] * L^{-1} \left[\frac{p}{p^2+1} \right] \\ &= \cos t * \cos t = \int_0^t \cos \tau \cdot \cos(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} (t \cos t + \sin t) \end{aligned}$$

4.2.5 用Laplace变换法求解偏微分方程的定解问题

1. 一维波动方程的半无界问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (x > 0, t > 0) \\ u|_{x=0} = g(t), u|_{x=+\infty} \text{有界} & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 & (x \geq 0) \end{cases} \quad (4.96)$$

第一步, 把 x 看成参数, 对方程两边和边界条件关于自变量 t 进行Laplace变换, 并记 $L[u(x, t)] = \hat{u}(x, p)$, $L[g(t)] = \hat{g}(p)$, 可得

$$L[u_{tt}] = a^2 L[u_{xx}] = a^2 \hat{u}_{xx}$$

而

$$L[u_{tt}] = p^2 \hat{u}(x, p) - pu|_{t=0} - u_t|_{t=0} = p^2 \hat{u}(x, p)$$

因此问题(4.96)化为

$$\begin{cases} \hat{u}_{xx} = \frac{p^2}{a^2} \hat{u}(x, p) \\ \hat{u}|_{x=0} = \hat{g}(p), \quad \hat{u}|_{x=+\infty} \text{有界} \end{cases} \quad (4.97)$$

第二步, 把 p 看成参数, 求解上面以 x 为自变量的常微分方程的定解问题。常微分方程的通解为

$$\hat{u}(x, p) = c_1(p)e^{\frac{p}{a}x} + c_2(p)e^{-\frac{p}{a}x}$$

由 $\hat{u}|_{x=+\infty}$ 有界可得 $c_1(p) = 0$, 由 $\hat{u}|_{x=0} = \hat{g}(p)$ 得 $c_2(p) = \hat{g}(p)$, 故问题(4.97)的解为

$$\hat{u}(x, p) = \hat{g}(p)e^{-\frac{p}{a}x}$$

第三步, 把 x 看成参数, 对上式两边关于 p 进行Laplace逆变换, 利用延迟性质的推论(4.76) (其中 t_0 取为 $\frac{x}{a}$), 可得原问题(4.96)的解为

$$u(x, t) = L^{-1} [e^{-\frac{x}{a}p} \hat{g}(p)] = \begin{cases} g(t - \frac{x}{a}), & t \geq \frac{x}{a} \\ 0, & t < \frac{x}{a} \end{cases}$$

注2 计算 $L[u_{tt}]$ 时要用到原来函数 $u(x, t)$ 的初始条件 $u|_{t=0}$ 和 $u_t|_{t=0}$, 因此我们只对(4.96)的方程和边界条件进行Laplace变换。这一点是与Fourier变换不同的。

注3 虽然问题(4.96)中的自变量 x 和 t 的变化范围都是 $[0, +\infty)$, 但是因计算 $L[u_{xx}]$ 要用到 $u|_{x=0}$ 和 $u_x|_{x=0}$, 而本问题给出的是 $u|_{x=0}$ 和 $u|_{x=+\infty}$, 没有给出 $u_x|_{x=0}$, 因此只能关于自变量 t 进行Laplace变换。

2. 一维热传导方程的半无界问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (x > 0, t > 0) \\ u|_{x=0} = g(t), u|_{x=+\infty} \text{有界} & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = 0 & (x \geq 0) \end{cases} \quad (4.98)$$

把 x 看成参数, 对方程两边和边界条件关于自变量 t 进行Laplace变换, 并记 $L[u(x, t)] = \hat{u}(x, p)$, $L[g(t)] = \hat{g}(p)$, 再利用初始条件, 可得

$$\begin{cases} \hat{u}_{xx} = \frac{p}{a^2} \hat{u}(x, p) \\ \hat{u}|_{x=0} = \hat{g}(p), \quad \hat{u}|_{x=+\infty} \text{有界} \end{cases} \quad (4.99)$$

把 p 看成参数, 求解上面以 x 为自变量的常微分方程的定解问题。常微分方程的通解为

$$\hat{u}(x, p) = c_1(p)e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + c_2(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

由 $\hat{u}|_{x=+\infty}$ 有界可得 $c_1(p) = 0$, 由 $\hat{u}|_{x=0} = \hat{g}(p)$ 得 $c_2(p) = \hat{g}(p)$, 故问题(4.99)的解为

$$\hat{u}(x, p) = \hat{g}(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

把 x 看成参数, 对上式两边关于 p 进行Laplace逆变换。由查表知, $\forall \alpha > 0$, 有

$$L \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-y^2} dy \right] = \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}$$

故

$$L \left[\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-y^2} dy \right\} \right] = p \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-y^2} dy \Big|_{t=+0} = e^{-\alpha\sqrt{p}}$$

以 $\alpha = \frac{x}{a}$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned} L^{-1} [e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}}] &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-y^2} dy \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} \right) \Big|_{y=\frac{x}{2a\sqrt{t}}} \\ &= \frac{x}{2a\sqrt{\pi} \cdot t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \end{aligned}$$

因此原问题的解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= L^{-1} [\hat{g}(p)e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}}] = L^{-1}[\hat{g}(p)] * L^{-1} [e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}}] = g(t) * L^{-1} [e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}}] \\ &= \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau \end{aligned}$$

习题4.2

用Laplace变换法求解下面的定解问题。

1.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (x > 0, t > 0) \\ u_x|_{x=0} = g(t), u|_{x=+\infty} \text{有界} & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 & (x \geq 0) \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (x > 0, t > 0) \\ u_x|_{x=0} = g(t), u|_{x=+\infty} \text{有界} & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = 0 & (x \geq 0) \end{cases}$$

已知, \forall 常数 $\alpha > 0$, 成立

$$L^{-1} \left[\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$$

第五章 位势方程的基本解和Green函数 解法，三类方程总结

第六章 两个自变量的一阶偏微分方程组 (略)