2019 Kira 概统十篇

编者　Kira 张翀

微博：　@Kira 言而信

公众号：@Kira 考研数学

2019 Kira 概统十篇 内容清单

2019「Kira概统十篇」之一

全概率公式自己推，贝叶斯公式不用背.

首先连根拔起"完备事件组"和"全集分解"(综合大题的宠儿).

■ 定义：设Ω为试验E的样本空间，$B_1,\cdots,B_n$为E的一组事件，若

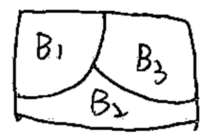
① $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=\Omega$

② $B_iB_j=\varnothing$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots n$.

则称$B_1,B_2,\cdots,B_n$为一完备事件组.

则对任意事件A都有 $A=A\Omega=AB_1\cup AB_2\cup\cdots\cup AB_n$

可直观理解为$B_1,\cdots,B_n$这n个事件恰好把Ω"无缝瓜分"了. 如右图，B_1,B_2,B_3即为完备事件组. 我们在实际问题中经常可以找到这种瓜分(如后面例题).

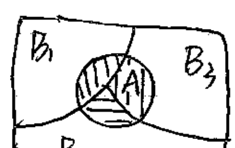


随便给个事件A和完备事件组B_1,B_2,B_3，我们可自然有以下操作：

$$\begin{aligned}p(A)&=p(A\Omega)=p(A(B_1\cup B_2\cup B_3))\\&=p(AB_1\cup AB_2\cup AB_3)\quad\leftarrow\boxed{\text{分配律}}\\&=p(AB_1)+p(AB_2)+p(AB_3)\quad\leftarrow\boxed{\text{可列可加性}}\\&=p(A|B_1)p(B_1)+p(A|B_2)p(B_2)+p(A|B_3)p(B_3)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{逐项用乘法公式}}$

其中 $p(A)=p(AB_1)+p(AB_2)+p(AB_3)$ 可直观理解为A被AB_1,AB_2,AB_3"无缝瓜分"了.(右图可以感受一下)



对于 $p(A)$ 不易求得，但又易找到完备事件组 $B_1,\cdots,B_n$ 且 $p(B_i)$ 和 $p(A|B_i)$ 易得时，我们便可采用全概率公式，即

■ $p(A)=p(A|B_1)p(B_1)+p(A|B_2)p(B_2)+\cdots+p(A|B_n)p(B_n)$
其中 $B_1,\cdots,B_n$ 是完备事件组且 $p(B_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$.

(↑明白其中道理，做题顺手就推出来了)

关于贝叶斯公式，我的理念是"不用背"！
反正背完了你还是分不清哪个字母是哪个字母，也不会套。←_←

事实上，只要能根据题意写出求什么式子，比如 $p(B_i|A)$ 就能自然由条件概率公式得到：

$$p(B_i|A)=\frac{p(AB_i)}{p(A)}$$

$$=\frac{p(B_i)p(A|B_i)}{p(A)} \quad \text{(由乘法公式)}$$

(☺ 其中分母就是刚刚全概率求出的 $p(A)$ ！)

所谓贝叶斯公式，其实只要能把 $p(B_i|A)$ 这个式子从题中读出来，便自然能求对，没必要背一大坨公式。

例

市场上有甲、乙、丙三家工厂生产的同一品牌产品，已知三家

工厂的市场占有率分别为 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$，且三家工厂的次品率分别为 2%, 1%, 3%. 试求

(1) 买到一件次品的概率

(2) 某消费者买到一件次品，它出自甲厂的概率为？

思路：step1. 找到"恰好瓜分Ω"的完备事件组，设为 $B_1, B_2, B_3, \cdots$

step2. 求谁就把谁设为A（利用全概率）

step3 列式计算

☺ 只要字母能设对，题目一定能做对～

解：(1) 设：事件A为"买到一件次品"

B_1, B_2, B_3 分别为买到甲,乙,丙厂产品 [注1]

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$$
$$= 0.02\times\frac{1}{4} + 0.01\times\frac{1}{4} + 0.03\times\frac{1}{2} = 0.0225$$

(2) $$P(B_1|A) = \frac{P(AB_1)}{P(A)} \quad [注2]$$
$$= \frac{0.02\times\frac{1}{4}}{0.0225} \quad [注3]$$
$$= 0.22$$

☺ kira备注

[注1] 甲,乙,丙三家工厂恰好瓜分市场，设出完备事件组 B_1, B_2, B_3

[注2] 已知"买到次品"即 B 发生；求"出自甲厂"，即 $P(B_1|A)$

[注3] $P(A|B)$ 和 $P(A)$ 第(1)问中都有了，直接抄.

大家可以多找此类题目来做做，且渐训练从题目中抓完备事件组，抓条件概率，抓全概率，抓贝叶斯的火眼金睛和"唰唰"推导公式的顺滑手法！

其实全概率公式的应用远不止于应用题，历年真题随机变量大题才是全概率公式真正发挥的舞台，我会在今年的课程中带大家继续探索。

Kira
2018.6.

$P(a<X<b)=F(b-0)-F(a)$ 怎么才能写得又快又对?
从随机变量X到"导函唯二概率"带大家通俗串一串

从前世界上有很多很多随机事件,比如掷一枚骰子
$A=\{$掷出2$\}$, $B=\{$掷出偶数$\}$, $C=\{$掷出大于3的数$\}$
但用文字表述事件总是非常孤立,也没法用微积分等技术来计算规律.

忽然有人灵机一动,诶!我们可以设"掷出的点数是X"
这样便有 $A=\{X=2\}$, $B=\{X=2,4,6\}$, $C=\{X>3\}$
惊喜地发现,所有的随机事件都可以用X统一表述

(事实上我们总可以引入适当的随机变量来描述事件,比如用 $\{X=1\}$ 代表{明天下雨},用 $\{X=0\}$ 代表{明天不下雨}.)

这样,求 $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ 便转化为求 $P(X=2)$,
$P((X=2)\cup(X=4)\cup(X=6))$, $P(X>3)$.

事实上导函间所有用X表示的概率都可以用 $P(X\leq a)$ 和 $P(X<a)$ 这两个概率通过运算得到! 比如:

$P(A)=P(X=2)=P(X\leq 2)-P(X<2)$
$P(C)=P(X>3)=1-P(X\leq 3)$
$P(B)=P(X=2)+P(X=4)+P(X=6)=\cdots$

所以我将 $P(X\le a)$ 和 $P(X<a)$ 命名为"宇宙唯二概率"（主要为了加深印象…）

进一步，定义 X 的分布函数：

$$F(x)=P(X\le x)\quad,\ \forall x\in R.$$

此时对于"宇宙唯二概率"有

$$\boxed{\begin{aligned}P(X\le a)&=F(a)\\ P(X<a)&=F(a-0)\end{aligned}\quad > \text{直接背！只需背这2个！}}$$

(p.s. $F(a-0)$ 即 $\lim_{x\to a^-}F(x)$，推导过程和有关 $F(x)$ 的详细解释我将在今年的概统直播课中讲解)

Amazing！也就是说，我们一定能用 $F(x)$ 来求宇宙唯二概率，进一步求出宇宙间所有的概率.

比如我们会遇到这种题：

例

已知 X 的分布函数为 $F(x)$，试用 $F(x)$ 求以下概率.

(1) $P(X=1)$

(2) $P(a<X\le b)$

(3) $P(a<X<b)$

(4) $P(X\ge 0)$

解：(到现在应该完全不用死记硬背了吧！)

思路：step 1. 把概率改写成"宇宙唯二概率"

step2. 用 $F(x)$ 的取值换掉"宇宙唯二概率".

解:

$$\boxed{\text{step1}} \qquad\qquad \boxed{\text{step2}}$$

(1) $P(X=1)=P(X\le 1)-P(X<1)=F(1)-F(1-0)$

(2) $P(a<X\le b)=P(X\le b)-P(X\le a)=F(b)-F(a)$

(3) $P(a<X<b)=P(X<b)-P(X\le a)=F(b-0)-F(a)$

(4) $P(X\ge 0)=1-P(X<0)=1-F(0-0)$

□

行云流水，一气呵成有木有❗

再过很多年肯定依然能记得这种题该怎么做

Kira

2018.6.

一维随机变量函数的分布之已知 X 的分布，求 $Y=g(X)$ 的分布.

温馨提示：本篇虽有两个字母 X 和 Y，却是一维问题，唯一真正的随机变量是 X，且我们知道 X 的分布，不知道 Y 的分布．所以思路一定是把 Y 换成 $g(X)$，利用 X 的分布来计算 Y 的分布.

求 $Y=g(X)$（比如 $Y=X^2$）的分布．$g(X)$ 形式不重要．X 的类型决定了解题方向.

· 情形一：当 X 是离散型随机变量（没难度）.

例

已知 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$，求 $Y=X^2$ 的分布律.

思路：step1. 写出 Y 所有取值
step2. 求每个取值对应的概率.

解：$Y=0, 1$

$$P(Y=0)=P(X^2=0)=P(X=0)=\frac{1}{3}$$
[注1]

$$P(Y=1)=P(X^2=1)=P(X=-1)+P(X=1)=\frac{2}{3}$$

$$\therefore Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$ □

[注1] 计算中及时将 Y 换成 $g(X)$，利用 X 的已知条件解题.

★ 情形二：当 X 是连续型随机变量.

本文仅介绍分布函数法，公式法在我的课程中介绍

■ 已知 $X\sim f(x)$，求 $Y=g(X)$ 的概率密度 $f_Y(y)$：
先求分布函数 $F_Y(y)$，有

$$F_Y(y)=\underset{\boxed{\text{定义}}}{P(Y\le y)}=\underset{\boxed{\text{将}Y\text{换成}g(X)}}{P(g(X)\le y)}$$

再将 y 从 $-\infty$ 取遍 $+\infty$，讨论 $P(g(x)\le y)$ 的值.

2006. 数一三〈真〉

设随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0\\ \frac{1}{4}, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\text{，令 } Y=X^2.$$

求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

（☺ Kira 备注：我先给出一套完全依于原始公式，大家都能看懂的步骤，最后会简单说下熟练后如何分段最快.）

解：$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$ ← 固定三件套

① 当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$. ← 此时不能直接写 $P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$，当 $y<0$ 时，$X^2\le y$ 为不可能事件

当 $y\ge 0$ 时，$F_Y(y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f_X(x)dx$ ←

② 当 $\sqrt{y}\ge 2$ 即 $y\ge 4$ 时，$F_Y(y)=1$.

把 y 看成常数，在 $(-\sqrt{y},\sqrt{y})$ 对 X 求概率，就在 $\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}$ 对 $f_X(x)$ 求积分！

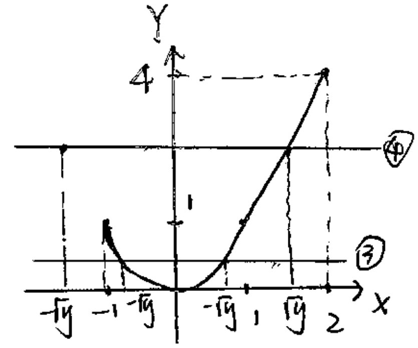
· BINBIN ·

③ 当 $0\le\sqrt{y}<1$ 即 $0\le y<1$ 时，

$$F_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\,dx$$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{3}{4}\sqrt{y}$$

Kira备注：此时，$f_X(x)$ 在 $(-\sqrt{y},0)$ 取 $\frac{1}{2}$，在 $(0,\sqrt{y})$ 上取 $\frac{1}{4}$



作图：$Y=g(X)$ 的图象
画出 X 取正概的范围 $(-1,2)$.

④ 当 $1\le\sqrt{y}<2$ 即 $1\le y<4$ 时，

$$F_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\,dx$$

$$=\underbrace{\int_{-\sqrt{y}}^{-1}0\,dx}_{}+\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}$$

常省略不写，此处写出来为展示完整的逻辑

$$\therefore F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{3}{4}\sqrt{y}, & 0\le y<1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}, & 1\le y<4\\ 1, & 4\le y\end{cases}\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1<y<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$ □

写所有的概率密度范围都可以完全不写"≤"，只写"<"即可，挑不出毛病！

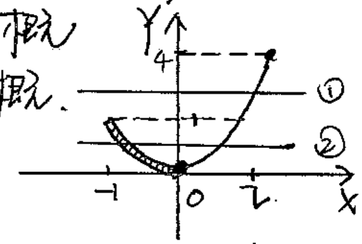
建议大家先理解上述解法，彻底理解整个推算过程，再理解的基础上，我们可采用一种更快的

😊 Kira Tip：已知 $X \sim f_X(x)$ 求 $Y=g(X)$ 的分布 $F_Y(y)$ 时，先画 $Y=g(X)$ 图象，定义域取 $f_X(x)$ 正概区间，找 $F_Y(y)=0$，$F_Y(y)=1$，非常快！

方法写 y 的分段：

由 $Y=g(X)$，X 的正概区间决定了 Y 的正概区间
（当 X 不可能落在 $X=a$ 时，Y 也不可能落在 $g(a)$）

▶ 所以由 $Y=X^2$ 图象，X 在 $(-1,2)$ 取正概
抓最低点和最高点，Y 在 $(0,4)$ 取正概。
马上写出：



① 当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$
② 当 $y\geq 4$ 时 $F_Y(y)=1$ 。（抓最高点和最低点）

▶ 然后在 $(0,4)$ 之间连着画水平线（如图），与 $Y=X^2$ 图象有几种交法，就分几段【注】区间分出
③ 当 $0\leq y<1$ 时，…
④ 当 $1\leq y<4$ 时，…
再积分，便目标明确，省力许多。原理大家结合"原始公式法"应当不难理解。

[注] 在 $(-1,0)$ 上 $f_X(x)=\frac{1}{2}$，在 $(0,2)$ 上 $f_X(x)=\frac{1}{4}$，
所谓"交法"，指交于 $f_X(x)$ 的不同分段，
比如 ②，横线交于 $(-1,0)$ 和 $(0,2)$，此时 $f_X(x)$ 取 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{4}$
①，横线"交于" $(-\infty,-1)$ 和 $(0,2)$，此时 $f_X(x)$ 取 0 和 $\frac{1}{4}$
所以是两种"交法"，其余题目依次类推。

此类题目还有诸多变化，如 $Y=g(X)$ 为分段函数等，我也总结出了万能套路，本文不展开细说了，会在课程中全部讲到，大家也可自行练习。

Kira
2018.6.

已知 $(X,Y)\sim f(x,y)$，则 $P(X<Y)$，$P(X+Y>1)$，$P(X>3, Y<1)$ 本质都是一回事！

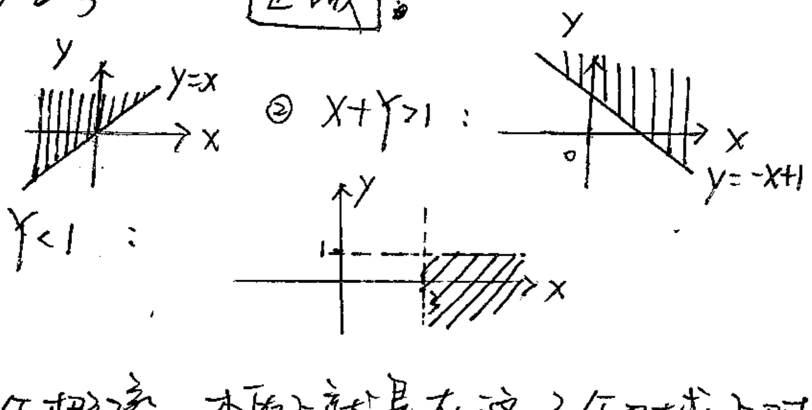
本文我们讲"已知 $(X,Y)\sim f(x,y)$，求 $P\{(X,Y)\in G\}$"题型，借此机会，带大家感受一下识别题型的重要性。

■ 原始公式（二维连续型随机变量性质）：
已知二维连续型随机变量 $(X,Y)\sim f(x,y)$，则对于任意平面区域 $G\subset R^2$，有 $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy$.

即："在哪求概率，就在哪对 $f(x,y)$ 求二重积分"

我们对区域要敏感，在实际问题中 $P\{(X,Y)\in G\}$ 会以以下形式出现：$P(X<Y)$，$P(X+Y>1)$，$P(X>3, Y<1)$……这些题并不是让你比较大小（如 $P(X<Y)$），也不是让你拆成两个一维概率（如 $P(X>3, Y<1)$），它们都有一个共同的名字——$\boxed{\text{区域}}$！

① $X<Y$：　② $X+Y>1$：　③ $X>3, Y<1$：



求这三个概率，本质上就是在这3个区域上对 $f(x,y)$ 求二重积分，方法是完全相同的！看看你考试能否当场识别？

例

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+\frac{xy}{3}, & 0<x<1,\ 0<y<2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

求 $P(X+Y\geq 1)$

思路: step1. 作 y 关于 x 的图象，找到 $f(x,y)$ 的正概区域 D

step2. 找区域 $G=\{x+y\geq 1\}$，用阴影部分画出 $D\cap G$

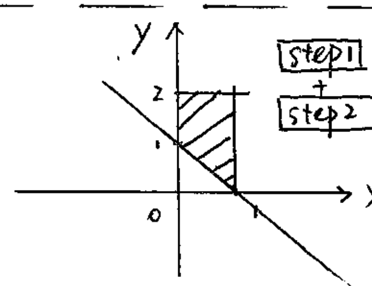
step3. 列式，$P(X+Y\geq 1)=\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$ ① $\boxed{原始公式}$

$$=\iint\limits_{D\cap G}\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dx\,dy \quad ② \quad [注1]$$

▲ [注1] 从①到②是由于 $f(x,y)$ 为分段函数，仅在 D 上取 $x^2+\frac{xy}{3}$，在 D 以外区域取 0. 而 G 既包含了 D，又包含了 $\bar{D}$，在 $G\cap\bar{D}$ 上对 $f(x,y)=0$ 积分结果为 0，因此有

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D\cap G}\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dx\,dy.$$

解: $\boxed{step3}$



$$P(X+Y\geq 1)=\iint\limits_{x+y\geq 1} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\iint\limits_{\substack{x+y\geq 1\\ 0<x<1,\,0<y<2}} x^2+\frac{xy}{3}\,dx\,dy \quad ①$$

$$=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{2}\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dy \quad ② \quad [注2]$$

$$=\frac{65}{72}$$

□

[注2] 从①到②是纯粹的高数问题. 翻译成大家熟悉的描述方式即"求 $f(x,y)=x^2+\frac{xy}{2}$ 在区域 $D=\{x+y\geq 1, 0<x<1, 0<y<2\}$ 上的二重积分".

其他同类型题大家可以多多找来练手, 只要题型识别正确就一定有思路, 能算到底!

也欢迎大家报名我的概统课程, 观看我直播时的现场演示, 学习其关联题型的解题技巧~(强行植入)

微博: @kira言而信
微信公众号: kira考研数学.

Kira
2018. 6.

已知$(X,Y)\sim f(x,y)$，如何求分布函数$F(x,y)$.

求二维随机变量(X,Y)分布函数$F(x,y)$往往计算都比较庞大，因为我们并不是求一个值，而是要求出整个函数。且$F(x,y)$是定义在整个二维平面上的，即x和y都要取遍$-\infty$到$+\infty$，这是必须遵守的铁律.

■ 原始公式（本文仅以连续型(X,Y)为例）

若(X,Y)为二维连续型随机变量，$f(x,y)$为其概率密度函数，则其分布函数为

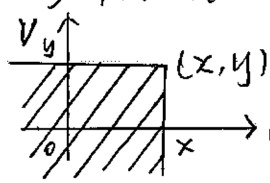
$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv.$$

kira备注：

① $F(x,y)$定义在全平面上，即x和y都从$-\infty$取遍$+\infty$，必须把所有情况讨论完整.

② 积分变量是u,v. 可以认为，一旦x和y的范围确定，便将x和y当作常数来积分.

③ 由定义，$F(x,y)=P\{X\le x,\ Y\le y\}$. 不难发现，根据我们第四篇"在哪个区域求概率，就在这个区域求积分"，本质上$F(x,y)$是在求$f(u,v)$在以(x,y)为顶点的左下矩形区域上的积分. 只不过(x,y)取值不固定，需要我们进一步讨论.



以下题为例梳理思路.

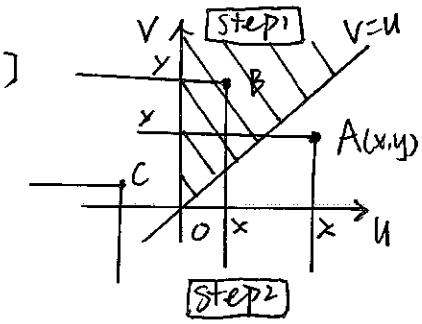
例

设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

求联合分布函数 $F(x,y)$

思路：step1. 作出 $f(u,v)$ 的正概区域，用阴影标出.
step2. 将以 (x,y) 为顶点的广义矩形在 u-v 平面移动，使 x 和 y 均取遍 $(-\infty,+\infty)$，观察广义矩形与正概区域的交，交有几种情况，$F(x,y)$ 就分几段.
step3. 每个分段中利用定义 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}du\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,dv$ 求出函数表达式.



解：① 当 $x<0$ 或 $y<0$ 时，$F(x,y)=0$ [注1]

step3 ② 当 $0\le y\le x$ 时，（如A点所示）

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,du\,dv$$
$$=\int_{0}^{y}dv\int_{0}^{v}e^{-v}\,du$$
$$=1-e^{-y}-ye^{-y}$$ [注2]

③ 当 $0<x<y$ 时，（如B点所示）

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,du\,dv$$
$$=\int_{0}^{x}du\int_{u}^{y}e^{-v}\,dv$$
$$=1-e^{-x}-xe^{-y}$$

（逐步超精细解析见P17）

综上，(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0\\ 1-e^{-y}-ye^{-y}, & 0\le y\le x\\ 1-e^{-x}-xe^{-y}, & 0<x<y\end{cases}$$ [注3]

□

Kira大解析:

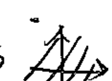
[注1] 移动(x,y)左下矩形，当$x<0$或$y<0$时，左下矩形与正概区域的交集为空，即$F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$在区域$\{u\le x, v\le y\}$上$f(u,v)=0$，故积分结果$F(x,y)=0$.

[注2] 当$x\ge0$且$y\ge0$时，我们发现，当(x,y)在$v=u$上方（即B点）和$v=u$下方（即A点）时，左下矩形与正概区域的交分别为"梯形区域"和"三角形区域"，交的情况不同，因此，应分$0\le y\le x$和$0<x<y$两种情况讨论.

当$0\le y\le x$（如A点所示）时，在图表的三角形阴影区域上对e^{-v}作二重积分，将y当作常数，这是v型区域（即上下限为0和y可以确定）故后积v.

当$0<x<y$时同理，根据区域特点来选积分顺序. 另外，先写$0\le y\le x$或$0<y<x$都是可以的，不重不漏地取遍R^2上所有点即可.

[注3] 这里分享一个我防止(x,y)漏分段的小tip，就是每取完一段，就在草稿纸把这段区域涂黑.

比如写完①后，把$x<0$和$y<0$涂黑  → 写完②后，把$x>y$涂黑 ；最后 

全部涂黑，说明(x,y)的范围全部取遍$(-\infty,+\infty)$，没有遗漏了！

关于求$F(x,y)$的其他情形本文便不作讨论啦，大家可举一反三，自己总结。

注意，求$F(x,y)$这类问题是求二维随机变量的分布函数。而二维随机变量的函数$Z=g(X,Y)$是一维随机变量！一定要区分开！我在第八篇还会强调。

也就是说，此处是概统题目中唯一要动手求二维分布函数的地方哈～

Kira
2018.6.

已知 $(X,Y)\sim f(x,y)$，求边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$.

- 首先我们回顾几条很多同学认识不够清晰的常识.

判断下列说法是否正确：

1) 二维随机变量 (X,Y) 中，X 和 Y 都是一维随机变量吗？

2) 都有各自的一维分布函数吗？

3) 若 $(X,Y)\sim f(x,y)$，X 和 Y 一定都是连续型随机变量吗？

4) 若 $(X,Y)\sim f(x,y)$，X 和 Y 都有一维概率密度吗？

答案：以上全对（备注：$f(x,y)$ 是概率密度专属符号，能写成 $(X,Y)\sim f(x,y)$ 肯定有 (X,Y) 是二维连续型随机变量）.

由二维随机变量定义，1) √；随机变量必有分布函数，2) √；3) 4) 均 √，证明见浙大4版教材 P_{65}.

- 达成以上共识后，我们研究 X 的概率密度 $f_X(x)$ 和 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 怎么求.

公式：设 $(X,Y)\sim f(x,y)$，$(x,y)\in R^2$，则

X 的边缘概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$

Y .... $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx$

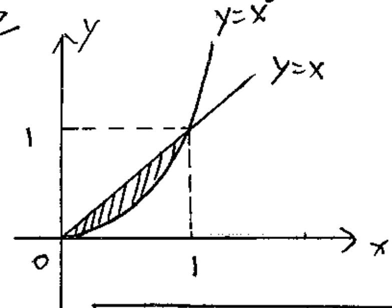
即：求谁就对另一个变量从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分，被积函数都是 $f(x,y)$.

列式很容易，关键是如何计算结果。

——教材 P66 例2.——

设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$$



求边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$。

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

$$=\begin{cases}\int_{x^2}^{x} 6\,dy, & \boxed{0<x<1}\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(1) 阴影部分 $f(x,y)$ 取正概，此时 $0<x<1$，也是 $f_X(x)$ 的正概区间

$$=\begin{cases}6(x-x^2), & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

□

☺ kira 讲解：

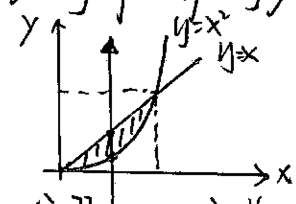
① $f_X(x)$ 是关于 x 的函数（就是高数中普普通通的一元函数）定义域 $(-\infty,+\infty)$。

② 若 $f(x,y)$ 是分段函数，则 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$ 也是分段函数，且二者正概范围一致。由 $f(x,y)$ 在阴影区域（即 $0<x^2<y<x<1$）取正值，所以，注(1)处 $f_X(x)$ 也在 $0<x<1$ 取正值。

- $f_X(x)$ 是关于 x 的函数，所以分段时我们只关心 x 的范围就好。起笔先确定好 $0<x<1$。

即 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_{□}^{□} 6\,dy, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

③ 确定 $0<x<1$ 时 y 的积分限(即"y从哪积到哪儿").
效仿二重积分确定y累次限的办法;我们在 $x\in(0,1)$ 区间内画一条向上箭头,穿过阴影区域. 先交 $y=x^2$, 后交 $y=x$, 所以下限(y最小取到) x^2, 上限(y最大取到) x
即 $\int_{x^2}^{x}$.



④ 理清概念防混淆:
因为 $f_X(x)$ 是关于x的函数,所以积分上下限一定是x的函数,而且要分别找到 y最小取x^2, 最大取x, 这样想明白就知道该写什么字母了.

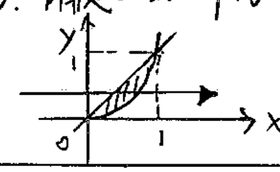
类似地,我们求 $f_Y(y)$, 顺便再梳理一下书写流程.

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$ ← step1. 闭眼套原始公式

$$=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}} 6\,dx, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$ ←

step2. 分段、先确定$0<y<1$,(由阴影部分显然), $f(x,y)=6$

step3. 确定x的上下限, 下限$x=y$
上限$x=\sqrt{y}$



$$=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

□

其他同类题型具体问题具体分析即可,最后强调一下画图是为了找$f(x,y)$的正概区域 $x^2<y<x$, 也就是对 $f(x,y)=6$ 作积分的区域(涂成阴影),别画错图啦!

Kira
2018.6.

已知$(X,Y)\sim f(x,y)$，求条件概率$P\{Y\le\frac{2}{3}|X=\frac{1}{2}\}$和$P\{Y\le\frac{2}{3}|X\ge\frac{1}{2}\}$是两种截然不同的题型！

直接说结论，求二维连续型随机变量的条件概率有两种题型，即$P\{c\le Y\le d\,|\,X=a\}$和$P\{c\le Y\le d\,|\,a\le X\le b\}$（此处仅以给定$X$为例，给定$Y$同理）

△ 通法：

① 若条件为"$X=a$"，则必用条件概率密度$f_{Y|X}(y|x=a)$积分求概率。

「例如：已知$(X,Y)\sim f(x,y)$，则$P(Y<\frac{1}{2}|X=\frac{1}{3})=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f_{Y|X}(y|x=\frac{1}{3})dy$
本质是求一维概率$P(Y<\frac{1}{2})=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f(y)dy$.」

② 若条件为"$a\le X\le b$"（给X的范围，而非严格"$X=$"），则必不用条件概率密度积分，而是第一章的公式
$P(A|B)=P(AB)/P(B)$，当$P(B)>0$.

「例如：已知$(X,Y)\sim f(x,y)$，则$P(Y<\frac{1}{2}|X>\frac{1}{3})$
$$=\frac{P(Y<\frac{1}{2},X>\frac{1}{3})}{P(X>\frac{1}{3})}$$」

方法的来龙去脉我会在cctalk的概统直播课中详细讲解（可以关注微博@kira言而信 和微信公众号"kira考研数学"报名）在此不赘述．本文主要带大家应用，计算，并提醒解题规范．

—— 第六篇例题，补充第(2)问 ——

(2) 求条件概率 $P\{Y\le\frac{2}{5}\mid X=\frac{1}{2}\}$ 和 $P\{Y\le\frac{2}{5}\mid X\ge\frac{1}{2}\}$

思路：

㊀ • step1. 求 $f_X(x)>0$ 时，$X=x$ 条件下的 $f_{Y|X}(y|x)$

step2. 将 $X=\frac{1}{2}$ 代入，得到 $f_{Y|X}(y|x=\frac{1}{2})$

step3. $P(Y\le\frac{2}{5}\mid X=\frac{1}{2})=\int_{-\infty}^{\frac{2}{5}} f_{Y|X}(y|x=\frac{1}{2})\,dy$

㊁ • step4. $P(Y\le\frac{2}{5}\mid X\ge\frac{1}{2})=\dfrac{P(Y\le\frac{2}{5},X\ge\frac{1}{2})}{P(X\ge\frac{1}{2})}$

$\boxed{\text{step1}}$

解：当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=6(x-x^2)>0$，则在 $X=x$ 条件下 [注1]

Y的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{x-x^2}, & x^2<y<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$\boxed{\text{step2}}$

特别地，在 $X=\frac{1}{2}$ 条件下 [注2]

$$f_{Y|X}(y|x=\tfrac{1}{2})=\begin{cases}4, & \frac{1}{4}<y<\frac{1}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$\boxed{\text{step3}}$

$$P\{Y\le\tfrac{2}{5}\mid X=\tfrac{1}{2}\}=\int_{-\infty}^{\frac{2}{5}} f_{Y|X}(y|x=\tfrac{1}{2})\,dy$$

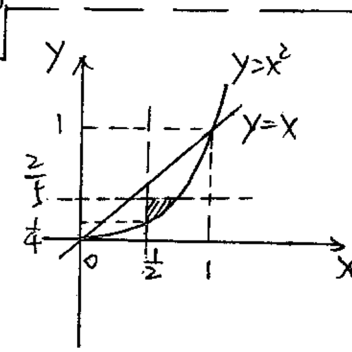
$$=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{5}} 4\,dy=\frac{3}{5}$$

Kira叮嘱：

[注1] 正如在第一章中我们必须养成习惯"$P(A|B)$，$P(B)>0$"永远一起出现——或者说只要能写出 $P(A|B)$，必然已经保证了 $P(B)>0$——当我们写 $f_{Y|X}(y|x)$ 时，也要始终带着"当 $f_X(x)>0$ 时，在 $X=x$ 条件下…"这句前提，要严谨！规范！

在具体题目中要把 $f_X(x)>0$ 时 x 的取值写出来，比如本题"当 $0<x<1$ 时"。很明显，$f_{Y|X}(y|x)$ 并非定义在全平面上，而仅仅在 $0<x<1$ 上有定义。

[注2] 求 $f_{Y|X}(y|X=a)$ 要"两步走"，先求 $f_{Y|X}(y|x)$ 通式，再将 $f_{Y|X}(y|x)$ 中所有的 x 换成 a.



$\boxed{\text{step4}}$

$$P\{Y\le \tfrac{2}{5} \mid X\ge \tfrac{1}{2}\} = \frac{P(Y\le \frac{2}{5}, X\ge\frac{1}{2})}{P(X\ge\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{5}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} 6\, dx}{\int_{\frac{1}{2}}^{1} 6(x-x^2)\,dx} \quad \cdots [注3]$$

$$= \frac{\frac{8\sqrt{10}}{25}-\frac{19}{20}}{\frac{1}{2}} = \frac{16\sqrt{10}}{25}-\frac{19}{10} \quad \square$$

[注3] 分子由第四篇的讲解，在区域 $\{Y\le\frac{2}{5}, X\ge\frac{1}{2}\}$ 上对 6 积分（或由二维均匀分布求面积）即得；
分母 $P(X\ge\frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 6(x-x^2)\,dx = \frac{1}{2}$

注意：以上讲解仅适用于 $(X,Y)\sim f(x,y)$，若 X 或 Y 有一个非连续，则另当别论！

Kira
2018.6.

求二维随机变量函数分布之已知X和Y的分布,
求Z=g(X,Y)的分布.

先说清楚Z是一维随机变量~求出来的分布函数只有1个变量. 本讲可以和第三讲对照着看, 原理是相同的. 但Z=g(X,Y)中X和Y的类型变化更多.

求Z=g(X,Y)(比如Z=X+Y的分布), g(X,Y)形式不重要. X和Y的类型决定了解题方向.

- 情形一. 当X和Y都是离散型随机变量(没难度)

例

已知X,Y的联合分布律

X \ Y	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

求Z=X+Y.

思路: step1 写出Z所有的取值.
step2. 求每个取值对应的概率.

回 △回 与Y=g(X)
(惊人地相似!)

解: Z=-1, 0, 1, 2. ← 自己凑一凑, 先把所有情况都写出来

$P(Z=-1)=P(X=0, Y=-1)=0$

$P(Z=0)=P(X=0, Y=0)+P(X=1, Y=-1)=\frac{2}{3}$

$P(Z=2)=P(X=1, Y=1)=\frac{1}{3}$

$P(Z=1)=1-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=0$

$\therefore Z\sim\begin{pmatrix}0 & 2\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ (□备注: 也可通过观察直接找Z=0,2)

·BMDM·

★情形二：当X和Y都是连续型随机变量.

本文仅介绍分布函数法，卷积公式我也有非常好用的一套步骤，有缘再介绍...

■ 分布函数法：已知 $(X,Y)\sim f(x,y)$，$(x,y)\in R^2$.
则随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\underbrace{g(X,Y)}_{\boxed{\text{把}Z\text{换成}g(X,Y)}}\le z)=\underbrace{\iint\limits_{g(x,y)\le z} f(x,y)\,dx\,dy}_{[\text{注}1]}$$

[注1] 注意到 $g(x,y)\le z$ 是区域！又来了！
在哪儿求概率就在这个区域求二重积分！
只是 z 要取遍 $-\infty$ 到 $+\infty$，所以随 z 取值不同，
区域的形状也会发生改变.

—— 2007. 数一三（真） ——

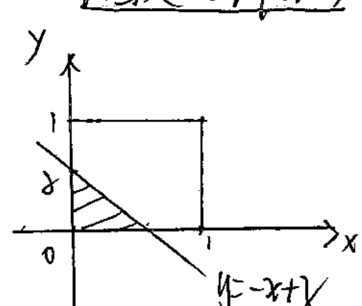
设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$

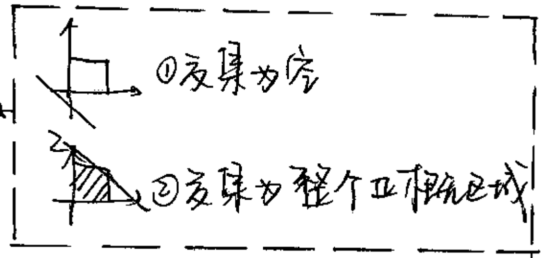
解：$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$ ← 固定"三件套"

$$=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,dx\,dy$$



$x+y\le z$ 即 $y=-x+z$ 下方，z 为截距.
又是第四讲的内容，即在 $\{x+y\le z\}$ 区域上
对 $f(x,y)$ 作二重积分，把 z 当常数

当z在$(-\infty, +\infty)$上移动时，区域$\{x+y\le z\}$和$f(x,y)$的正概区域$\{0<x<1,\ 0<y<1\}$的交共有四种情况:

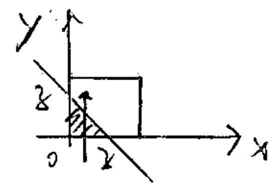


① 当$z<0$时，$F_Z(z)=0$.

② 当$z\ge 2$时，$F_Z(z)=1$

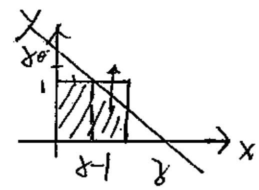
③ 当$0\le z<1$时 $F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x}(2-x-y)dy$

$$=z^2-\frac{1}{3}z^3$$



④ 当$1\le z<2$时 $F_Z(z)=1-\int_{z-1}^{1}dx\int_{z-x}^{1}(2-x-y)dy$

$$=1-\frac{1}{3}(2-z)^3$$



综上 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ z^2-\frac{1}{3}z^3, & 0\le z<1\\ 1-\frac{1}{3}(2-z)^3, & 1\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$

$\therefore f_Z(z)=\begin{cases}2z-z^2, & 0<z<1\\ 4-4z+z^2, & 1<z<2\\ 0, & 其他\end{cases}$ □

除上述两种最常见情形外，真题还喜欢考察X和Y一个离散一个连续且X和Y独立的情形(提示一下!)

考虑将离散型视为完备组，用全概率公式）。
另外2016级还考了一道非常新颖（变态？）的两个随机变量，一个离散，一个连续，且不独立的$Z=U+X$的分布。我也会在强化及冲刺阶段对此类综合大题进行详细讲解。

Kira.
2018.6

求 $Eg(X)$？$g(X)$ 是谁不重要，关键看 X 的类型！

数学期望是数字特征乃至统计部分计算的基石，方差，协方差，相关系数都需要通过期望计算（如 $DX = EX^2-(EX)^2$），而很少通过原始定义积分来求。

因此，准确通过定义式求期望是基本功！

当遇到求 EX^2，$E(\sin X+1)$ 等计算一维随机变量函数的期望这类问题时，头脑中必须马上出来清晰的思路。

▲ 原则：求 $Eg(X)$ 时，$g(X)$ 是谁不重要，不论是 EX^3，Ee^X 还是 $E|2X-3|$，我们的求解方法都完全相同，以不变应万变！

▲ 解题思路：取决于 X 的类型

① 若 X 为离散型，已知 X 的分布律，则先确定 $g(X)$ 的分布律，再用定义求 $Eg(X)$.（流程演示如下）

$$\text{由 } X \sim \left(\qquad\right) \Rightarrow g(X) \sim \left(\qquad\right) \Rightarrow Eg(X) =$$

② 若 X 为连续型，已知 X 的概率密度 $f(x)$，则直接积分求 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx$ 即可，没必要求 $g(X)$ 的分布.

(流程演示如下)

$$\boxed{\text{由 } X \sim f(x) \Rightarrow Eg(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx \quad \text{(搞定!)}}$$

—结合例题, 形象感受—

[例1]

已知 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, 求 $E(X^2+2)$

解: (一看离散, 毫不犹豫地求 X^2+2 的分布律)

$$Y = g(X) = X^2+2 = 3, 2, 6 \Rightarrow X^2+2 \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\therefore E(X^2+2) = \underbrace{3}_{\boxed{\text{取值}}} \times \underbrace{\frac{1}{4}}_{\boxed{\text{对应概率}}} + 2 \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{1}{4} = \frac{13}{4} \qquad \square$$

[例2]

已知 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$,

$Y = \min(X, 2)$, 求 EY.

解: (看到求 $E\min(X,2)$ 完全不慌, 按说好的套路积分!)

$$EY = E\min(X,2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\min(x,2)}_{\boxed{g(x)}} f(x)\,dx \qquad ①$$

$$= \int_0^{+\infty} \min(x,2)\cdot\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}\,dx \qquad ②$$

$$= \int_0^{2} x\cdot\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}\,dx + \int_2^{+\infty} 2\cdot\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}\,dx \qquad ③$$

$$= 5-5e^{-\frac{2}{5}}$$

☺ Kira备注:

(i) 注意①中不能写 $EY = \int_{-\infty}^{+\infty} \min(x,2)\cdot\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}\,dx$

原始公式为 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx$，必须尊重原封不动写 $f(x)$，

且 $f(x)$ 是分段函数，并非"$=\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}$"

(ii) 利用高数知识化简①式，先把抽象的 $f(x)$ 具体化，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \min(x,2)f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \min(x,2)\cdot \underbrace{0}_{\boxed{f(x)\text{在}(-\infty,0)\text{取}0}}\,dx + \int_0^{+\infty} \min(x,2)\cdot \underbrace{\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}}_{\boxed{f(x)\text{在}(0,+\infty)\text{取它}}}\,dx$$

(iii) 本质上，$y=\min(x,2)$ 是分段函数 $y=\begin{cases} x, & x\le 2 \\ 2, & x>2 \end{cases}$，

故对②分段积分，拆得③.

相信大家读完本文后，再遇到求 $Eg(x)$ 的题目，都能思路清晰，下手果断！

Kira

写于2018.6.

2019「Kira·概统十講」之十

求矩估计和最大似然估计的细节与注意事项

参数估计这一章首先要扭转思维：样本X_i是已知，未知参数θ_i是全场唯一的未知，我们的目的是建立关于θ_i的方程并求解。

矩估计和最大似然估计的步骤都是套路化的，矩估计实质上是计算数学期望，而最大似然估计的计算仅用到了初等数学知识（只估计一个参数时）

本文只介绍一个未知参数的矩估计和最大似然估计，主要目的是强调一些容易被忽略的细节，帮助大家更通透地理解和掌握。

Topic 1. 似然函数$L(\theta)$和最大似然估计的理解

离散型似然函数$L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$和连续型似然函数$L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$（其中$x_1,\cdots,x_n$为样本值）其含义为"恰好取到样本值$x_1,\cdots,x_n$的概率"。因为取到$x_i$的概率为$p(x_i;\theta)$，而"抽出样本值$x_1,\cdots,x_n$"等价于"抽到$x_1$且抽到$x_2$且…且抽到$x_n$"，该事件发生的概率等于它们各自概率相乘。

求最大似然估计的想法是，找到一个θ，使$L(\theta)$最大。其道理在于，我在总体中抽样有千千万万种抽法，为什么我只抽一次样本就偏偏抽中了你呢？我有理由相信你这组样本发生概率最大，所以我更容易抽到你，一次就抽中了。

·BMDM·

Topic 2 样本 X_i，样本值 x_i，估计量 $\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$，估计值 $\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$

1. 样本是大写字母 $X_1,\cdots,X_n$，是随机变量.
2. 样本值是小写字母 $x_1,\cdots,x_n$，是一次抽样中样本的观测值.
3. 估计量是样本的函数 $\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$，用大写字母表示
4. 估计值是样本值的函数 $\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$，用小写字母或确切的数表示

5. 矩估计：令 $\bar{X}=EX$ 是用大写字母，用样本计算，得到 θ 的估计量，也是大写字母！
6. 最大似然估计：令 $L(\theta)=\prod p(x_i;\theta)$，是用小写字母，用样本值计算，得到 θ 的估计值，也是小写字母！

7. 问什么答什么. 题中求估计量就答大写字母 $\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$，用最大似然估计得到的 $\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$ 要在最后改写成 $\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$；求估计值时同理.
8. 条件中只给了样本 $X_1,\cdots,X_n$ 而未给样本值 $x_1,\cdots,x_n$ 的，要先设"样本观测值为 $x_1,\cdots,x_n$"再用最大似然估计.

■ 本文不赘述矩估计和最大似然估计的步骤，重在强调上方注意事项. 下面以一道例题来串联：

—— 2013 数一三、23（真）——

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

· 注：⑦ 表示 Topic 2 中强调的第 7 条公式

其中 θ 为未知参数且大于 0，$X_1, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本

(1) 求 θ 的矩估计量

(2) 求 θ 的最大似然估计量 ⑦

解：(1) 令 $\overline{X} = EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x;\theta)\,dx$

$$= \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{\theta}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{\theta}{x}\right)^2 e^{-\frac{\theta}{x}}\,dx = \theta$$

所以 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \overline{X}$，其中 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ⑤

(2) 设 $x_1, \cdots, x_n$ 为样本观测值 ⑧

似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta^{2n}}{(x_1 x_2 \cdots x_n)^3} e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}, & x_1, \cdots, x_n > 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

当 $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$ 时，$\ln L(\theta) = 2n\ln\theta - \theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} - 3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ [注1]

令 $\frac{\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} = 0$

求得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$

所以 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = \dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}$ ⑦ □

[注1] 不能直接对 $L(\theta)$ 取对数，因为 $L(\theta)$ 可以取 0。此时应回归初心，我们的目的是让 $L(\theta)$ 最大，0 不可能是最大值，所以只需讨论当 $L(\theta) > 0$ 时即可。

本文至此已经帮大家扫清非常重要的地雷了。希望大家做题都能养成严谨的习惯。我始终认为，解题步骤的不严谨反映出逻辑的不缜密，进一步折射出对知识没有彻底理解。从一个人的卷面可以读出很多！

这是「2019·Kira概统十篇」的最后一篇啦～感慨文字的表现力还是非常有限的，如果大家想要更生动深刻全面系统的视听版讲解，希望我带你一起战胜大大小小的题目的话，欢迎报名参加我的网络直播课哦！

- 可以通过以下方式找到我和我的其他干货：
  工作微信号：Kira_SJTU（仅发布动态用）
  微信公众号：Kira考研数学
  新浪微博：Kira言而信

考研无忧，赢在自知。祝愿所有读到这里的考研er都能金榜题名！

（完）

Kira
2018.6.